

**Propagação de ondas mecânicas unidimensionais: uma análise numérica Via
MDF**

**Propagation of mechanical waves in one-dimensional: a numerical analysis Via
FDM**

DOI:10.34117/bjdv6n11-204

Recebimento dos originais: 03/10/2020

Aceitação para publicação: 11/11/2020

Caroline Belisário Zorzal

Mestre em Engenharia Mineral pela Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)
Instituto Federal do Espírito Santo – Campus Nova Venécia
Rodovia Miguel Curry Carneiro, 799 - Santa Luzia, Nova Venécia –ES
E-mail: carolinezorzal@gmail.com

Amanda de Barros Pereira

Doutoranda em Engenharia Mineral pela Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)
Universidade Federal de Ouro Preto
Campus Universitário Morro do Cruzeiro, Escola de Minas, DEMIN - Morro do Cruzeiro, Ouro
Preto - MG
E-mail: amandageologia@yahoo.com.br

Mayra Vitorino Freitas Flávio

Mestre em Engenharia Mineral pela Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)
Centro Universitário UniBH
Av. Prof. Mário Werneck, 1685 - Buritis - Belo Horizonte - MG
E-mail: mayravff@gmail.com

Christianne de Lyra Nogueira

Doutora em Engenharia Civil pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio)
Professora titular do DEMIN e PPGEM-UFOP
Universidade Federal de Ouro Preto
Campus Universitário Morro do Cruzeiro, Escola de Minas, DEMIN - Morro do Cruzeiro, Ouro
Preto - MG
E-mail: chris@em.ufop.br

RESUMO

As ondas mecânicas têm a capacidade de transportar energia através do meio em que se propagam e, em muitas situações, elas apresentam um grande potencial de dano. Daí a importância da previsão e controle de sua intensidade. O estudo do fenômeno da propagação de ondas mecânicas é de suma importância para diversas áreas da engenharia e constitui um problema de difícil solução inclusive para situações unidimensionais. Dessa forma, por meio da abordagem numérica, apresenta-se um modelo computacional com base na aproximação explícita do Método das Diferenças Finitas (MDF) para solução de problemas mecânicos unidimensionais de equilíbrio dinâmico. O modelo computacional é verificado através da análise da propagação de uma onda mecânica numa coluna, constituída por um material isotrópico com comportamento constitutivo linear elástico, engastada em uma extremidade e submetida a um carregamento periódico em sua extremidade livre. Os resultados numéricos são comparados com os resultados analíticos obtidos na literatura específica. Em seguida, o algoritmo é

aplicado na análise da influência da intensidade do carregamento periódico, da geometria e das propriedades elásticas da haste, na amplitude dos movimentos. Pode-se concluir que a amplitude dos deslocamentos aumenta, como era esperado, com o aumento da amplitude do carregamento e da altura, e diminui com o aumento do módulo de Young. Observa-se também que a velocidade de propagação diminui com a diminuição do módulo de Young.

Palavras-chave: Diferenças finitas, Algoritmo explícito, Equação da onda unidimensional, Equilíbrio dinâmico.

ABSTRACT

Mechanical waves have the ability to transport energy through the medium in which they propagate and, in many cases, have a great capacity for harm. Hence the importance of predicting and controlling its intensity. The study of the phenomenon of the propagation of mechanical waves is of paramount importance for a number of engineering areas and constitutes a problem that is difficult to solve even in one-dimensional situations. Therefore, a numerical method is used to present a computational model based on the explicit approximation of the Finite Differences Method (FDM) for the resolution of one-dimensional dynamic mechanical problems. The computational model is verified by an analysis of the propagation of a mechanical wave in a column, consisting of an isotropic material with a linear elastic constitutive behaviour, embedded in one end and subjected to periodic loading at its free end. The numerical results are compared with the analytical results obtained in the relevant literature. The algorithm is then used to analyze the influence of the intensity of the periodic loading, the geometry and the elastic properties of the column, the amplitude of the movements. It can be concluded that the displacement amplitude increases, as expected, with increasing loading amplitude and height, and decreases with increasing Young's modulus. It is also observed that the propagation speed decreases with the reduction of Young's modulus.

Keywords: Finite Difference Method, Explicit algorithm, One-dimensional wave equation, Dynamic equilibrium.

1 INTRODUÇÃO

As ondas mecânicas são geradas quando há deslocamento de uma parte do meio elástico em relação a sua posição original, levando a um movimento oscilatório em torno de sua posição de equilíbrio (Halliday et al., 2009). O distúrbio é transmitido à posição subsequente, através da onda gerada, sem movimento de matéria, mas com transporte de energia cinética e potencial. É esta energia mecânica propagada que leva as partículas, que compõem o meio, a oscilar em torno de suas posições de repouso (Santos, 2011).

Por sua capacidade de transportar energia através do meio, em algumas situações as ondas podem ser danosas, como em terremotos ou em vibrações excessivas de estruturas ou equipamentos (Figueiredo et al., 2020). No entanto, quando seu potencial de dano é controlado, as ondas mecânicas apresentam importantes aplicações na indústria, tal como a modelagem sísmica na geofísica (Antunes et al., 2014) ou, ainda, o desmonte de rochas por explosivos na mineração (Gou et al., 2020; Zorzal et al., 2019; Gui et al., 2018). Dessa forma, estudos da propagação de ondas mecânicas que conduzam à

predição e ao controle da amplitude de movimento e da velocidade de propagação se mostram relevantes para diversas áreas da engenharia.

Assim como grande parte dos problemas físicos, a propagação das ondas mecânicas é descrita matematicamente por um sistema de equações diferenciais parciais, cuja solução analítica só se torna possível para condições simples de contorno e de carregamento. Nesse contexto, problemas em domínios unidimensionais são relevantes, uma vez que podem ser aplicados para validar os modelos numéricos, assim como fornecer ao pesquisador experiência e confiança para analisar os casos mais elaborados (Thoaldo e Carrer, 2010).

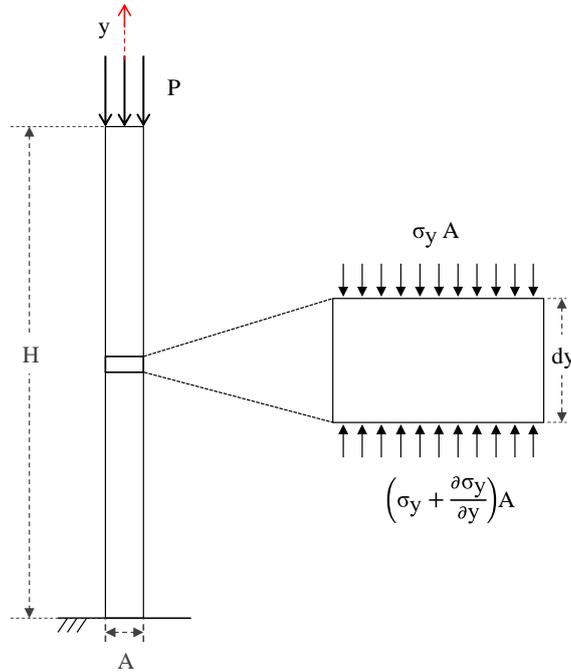
Na avaliação da propagação de ondas mecânicas, a solução pretendida, normalmente, é obtida em um curto intervalo de tempo, de forma que a formulação explícita do Método de Diferenças Finitas (MDF) está entre as mais indicadas (Antunes et al., 2014). Pelo MDF, as parcelas das derivadas parciais são substituídas por aproximações em diferenças transformando o sistema de equação diferencial num sistema de equação algébrica. A precisão do método é dependente da aproximação adotada e da discretização espacial e temporal adotadas.

Desta forma, por meio da abordagem numérica, apresenta-se um modelo computacional com base na aproximação explícita do MDF para solução de problemas mecânicos unidimensionais de equilíbrio dinâmico. O modelo computacional é verificado através da análise da propagação de uma onda mecânica numa coluna, constituída por um material isotrópico com comportamento constitutivo linear elástico, engastada em uma extremidade e submetida a um carregamento periódico em sua extremidade livre.

2 MODELO MATEMÁTICO

A propagação unidimensional de ondas mecânicas se caracteriza como um problema mecânico de equilíbrio dinâmico em condições de tensão e deformação unidimensionais. A Fig. 1 descreve o problema proposto onde se tem uma coluna de altura H e seção transversal A , sujeita a um estado de tensão (σ_y) e deformação (ε_y) unidimensionais na direção longitudinal. A coluna é constituída de material isotrópico, homogêneo e linear elástico com massa específica ρ e módulo de Young E .

Figura 1. Elemento infinitesimal em haste sob ação de um carregamento periódico em sua extremidade livre.



Fonte: Autoria própria.

A coluna é submetida a um carregamento periódico de intensidade P uniformemente distribuído (unidade de força por unidade de área) em sua extremidade livre, dada por:

$$P = -p_0 \text{sen}(\omega t) \quad (1)$$

em que p_0 é a amplitude de carregamento; ω é a frequência; e t é o tempo.

Estabelecendo o equilíbrio dinâmico do elemento infinitesimal dy indicado na Fig. 1, chega-se a seguinte equação diferencial que representa o equilíbrio dinâmico deste problema:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2)$$

em que v é o deslocamento longitudinal e $\partial^2 v / \partial t^2$ é a aceleração longitudinal.

No contexto da linearidade física e geométrica, ou seja, no âmbito da teoria da elasticidade linear e dos pequenos deslocamentos e pequenas deformações pode-se reescrever a Eq. 2 em termos do deslocamento longitudinal (v), tal como:

$$E \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3)$$

ou ainda:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (4)$$

em que c é a velocidade de propagação da onda, definida como:

$$c = \sqrt{E/\rho} \quad (5)$$

A equação unidimensional de propagação de onda mecânica, ou simplesmente, equação unidimensional da onda (Eq. 4) deve ser atendida em todo o domínio da coluna e deve satisfazer às condições de contorno do problema. Nesse caso, na base da coluna ($y=0$) os deslocamentos longitudinais são nulos uma vez que a coluna se encontra engastada. Logo, em qualquer tempo, tem-se que:

$$v(0, t) = 0 \quad (6)$$

Na extremidade livre da coluna ($y=H$), onde atua o carregamento periódico (Eq. 1), deve-se atender a condição de contorno em força, em que:

$$\sigma_y(H, t) = -p_0 \text{sen}(\omega t) \quad (7)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial v}{\partial y}(H, t) = \frac{-p_0 \text{sen}(\omega t)}{E} \quad (8)$$

A Eq. 4 também deverá atender à condição inicial ($t=0$), na qual os deslocamentos (v) e as velocidades ($\partial v/\partial t$) são nulos em qualquer ponto da coluna:

$$v(y, 0) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(y, 0) = 0 \quad (10)$$

A equação unidimensional da onda (Eq. 4) é uma equação diferencial parcial do tipo hipérbolica cuja solução, envolvendo carregamentos periódicos (Eq. 1), pode ser obtida analiticamente pelo método de separação das variáveis, uma vez que os deslocamentos também são assumidos como periódicos (Verrujit 2009). Assim sendo, tem-se a seguinte solução para Eq. 4:

$$v(y,t) = V(y)\sin(\omega t) \quad (11)$$

em que $V(y)$ é uma função apenas da posição. Se a Eq. 11 é uma solução da Eq. 4, então a seguinte relação é verdadeira:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2} V = 0 \quad (12)$$

cuja solução é dada por :

$$V(y) = c_1 \cos(\omega y/c) + c_2 \text{sen}(\omega y/c) \quad (13)$$

em que, c_1 e c_2 são constantes obtidas, aplicando as condições de contorno indicadas nas equações Eq. 6 e Eq. 8. Desta forma, aplicando a condição de contorno na base da coluna ($y=0$), tem-se que:

$$c_1 = 0 \quad (14)$$

E, aplicando a condição de contorno na extremidade livre ($y=H$), tem-se que:

$$c_2 = -\frac{P_0}{E(\omega/c) \cos(\omega H/c)} \text{sen}(\omega t) \quad (15)$$

Substituindo Eq. 14 e Eq. 15 na Eq. 13, e aplicando o resultado na Eq. 11, chega-se a:

$$v(y,t) = -\frac{P_0}{E(\omega/c) \cos(\omega H/c)} \text{sen}(\omega y/c) \text{sen}(\omega t) \quad (16)$$

3 MODELO NUMÉRICO

No caso de condições de contorno e carregamento complexas, uma solução analítica, tal como a indicada na Eq. 16, pode ser de difícil obtenção. Dessa forma, a adoção de um método numérico para obtenção de uma solução ainda que aproximada tem sido a escolha de muito engenheiros (Zill e Cullen 2001).

O MDF baseia-se na aplicação da série de Taylor para obter uma aproximação para as derivadas contínuas que aparecem nas equações diferenciais. Desta forma, usando uma aproximação em diferença central, podem-se obter as seguintes aproximações para as derivadas de segunda ordem:

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)_{i,j} = \left(\frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{\Delta y^2}\right) \quad (17)$$

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)_{i,j} = \left(\frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{\Delta t^2}\right) \quad (18)$$

em que *i* representa um ponto nodal genérico pertencente ao domínio do problema e *j*, o passo de tempo. A aplicação deste método pressupõe uma discretização do domínio espacial (Δy) e domínio temporal (Δt).

Assim, aplicando as aproximações da Eq. 17 e Eq. 18 na Eq. 4, chega-se a seguinte equação algébrica:

$$(v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j})c^2\Delta t^2 - (v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1})\Delta y^2 = 0 \quad (19)$$

ou ainda,

$$v_{i,j+1} = [Rv_{i-1,j} - 2(R-1)v_{i,j} + Rv_{i+1,j}] - v_{i,j-1} \quad (20)$$

em que

$$R = (c\Delta t/\Delta y)^2 \quad (21)$$

Para garantir a estabilidade e a convergência da solução numérica, o termo relativo a $v_{i,t}$ na Eq. 20 não pode ser nem negativo e nem nulo, dessa forma tem-se que:

$$-2(R - 1) > 0 \quad (22)$$

ou ainda, que:

$$\Delta t < \Delta t_{crit} = \Delta y / c \quad (23)$$

Como pode ser observado na Eq. 23 para garantir a estabilidade e a convergência da solução aproximada o incremento de tempo (Δt) a ser adotado na marcha explícita do tempo deverá ser menor que o incremento de tempo crítico que, por sua vez, depende da discretização espacial (Δy) adotada e das propriedades do meio através da velocidade de propagação da onda (c).

A Eq. 20 deverá ser aplicada em todos os pontos do domínio do problema, excetos nos contornos. Para o ponto $i=1$, na base da coluna ($y=0$), tem-se que o deslocamento é nulo; e para o ponto no topo da coluna em $y=H$, usando uma aproximação em diferença central para a derivada de primeira ordem da Eq. 8, tem-se que:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v_{n\text{poin}+1,j} - v_{n\text{poin}-1,j}}{2\Delta y} = \frac{-p_0 \text{sen}(\omega t)}{E} \quad (24)$$

ou ainda,

$$v_{n\text{poin}+1,j} = v_{n\text{poin}-1,j} - p_0 \text{sen}(\omega t) 2\Delta y / E \quad (25)$$

Substituindo a Eq. 25 na Eq. 20, chega-se a seguinte equação para o ponto no topo da coluna:

$$v_{n\text{poin},j+1} = \left[2Rv_{n\text{poin}-1,j} - 2(R - 1)v_{n\text{poin},j} - Rp_0 \text{sen}(\omega t) 2\Delta y / E \right] - v_{n\text{poin},j-1} \quad (26)$$

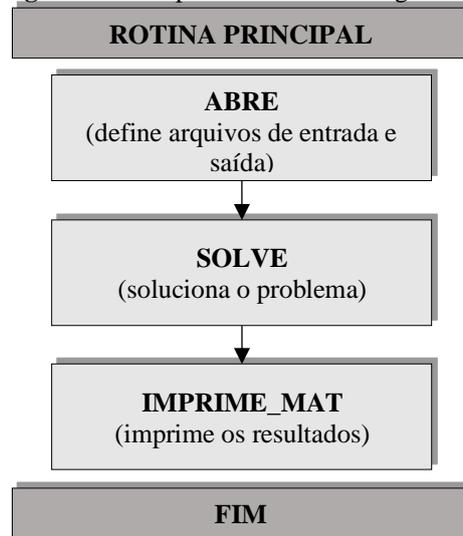
Para iniciar a marcha no tempo, faz-se necessário a determinação da distribuição de deslocamentos nos instantes de tempo $t_0=0$ e $t_0=-\Delta t$ (Eq. 20). Os valores de v_{i,t_0} e v_{i,t_0} podem ser obtidos a partir das condições iniciais indicadas nas Eqs. 9 e 10, pelas quais:

$$v_{i,t_0} = v_{i,t_0} = 0 \quad (27)$$

4 MODELO COMPUTACIONAL

A estrutura principal do algoritmo, desenvolvido em linguagem computacional FORTRAN 90, é apresentada na Fig. 2. Inicialmente, na subrotina ABRE, são definidos os arquivos de entrada e saída. Em seguida, na subrotina SOLVE, o problema pode ser solucionado analítica ou numericamente, conforme detalhado no Quadro 1.

Figura 2. Principais subrotinas do algoritmo.



Fonte: Autoria própria.

Quadro 1. Síntese do algoritmo implementado.

<p>SUBROTINA SOLVE</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Leitura das variáveis de entrada no arquivo de entrada (LLSOL, H, E, D, P0, W, NPOIN, NINT, TF, FIMP - ver definição no Quadro 2) 2. Cálculo das variáveis auxiliares (C, DY, DT, R – ver definição no Quadro 3) 3. Se LLSOL=1, chama a SUBROTINA SOLNUM <ol style="list-style-type: none"> 3.1 Verifica se $\Delta t < \Delta t_{crit}$ (Eq. 22) 3.2 Define-se os deslocamentos em cada ponto para t_0 e t_0 como nulo (Eq. 27) 3.3 Loop de incrementos de tempo <ol style="list-style-type: none"> 3.3.1 Loop de pontos nodais <ol style="list-style-type: none"> 3.3.1.1 Calcula a solução numérica em equilíbrio dinâmico (Eq. 19 e Eq. 25) <p>FIM SUBROTINA SOLNUM</p> <ol style="list-style-type: none"> 4. Se LLSOL=2, chama a SUBROTINA SOLANA <p>SUBROTINA SOLANA</p> <ol style="list-style-type: none"> 4.1 Loop de incrementos de tempo <ol style="list-style-type: none"> 4.1.1 Loop de pontos nodais <ol style="list-style-type: none"> 4.1.1.2 Calcula a solução analítica em cada ponto i em cada instante t (Eq.15) <p>FIM SUBROTINA SOLANA</p> <p>FIM</p>
--

Fonte: Autoria própria.

Dentro da subrotina SOLVE, primeiramente, é feita a leitura das variáveis de entrada (Quadro 2) e o cálculo das variáveis auxiliares (Quadro 3). Caso o usuário opte pela solução numérica (LLSOL=1), a subrotina SOLNUM é acionada. Verifica-se se o intervalo de tempo (Δt) adotado atende a Eq. 22.

Para iniciar a marcha no tempo, os valores de v_{i,t_0} e $v_{i,t_{00}}$ são calculados a partir da Eq. 27. Para os demais intervalos de tempo, o equilíbrio dinâmico é obtido utilizando-se a Eq. 19 e a Eq. 25. Por outro lado, se a opção do usuário for pela solução analítica (LLSOL=2), a subrotina SOLANA é acionada, onde os deslocamentos são calculados analiticamente, para cada ponto da malha, em todos os instantes de tempo (Eq.15).

A subrotina IMPRIME_MAT imprime a matriz de resultados no arquivo de saída. Em cada intervalo de tempo, são apresentadas as seguintes informações de cada ponto nodal: identificação (i), posição (m), tempo (s) e deslocamento (m). O número de intervalos de tempo impressos é definido no arquivo de entrada pelo parâmetro FIMP.

Quadro 2: Definição das variáveis de entrada do algoritmo.

Variável de Entrada	Definição
LLSOL	Tipo de solução do problema: 1 - Numérica; 2 - Analítica
H	Altura H da haste (m)
E	Módulo de elasticidade E do material (Pa)
D	Densidade ρ do material (kg/m^3)
P0	Amplitude p_0 do carregamento (Pa)
W	Frequência ω do carregamento periódico (rad/s)
NPOIN	Número de pontos nodais da malha unidimensional (vertical)
NINT	Número total de análises no tempo
FIMP	Fator de impressão das análises no tempo
TF	Tempo final de análise (s)

Fonte: Autoria própria.

Quadro 3: Variáveis auxiliares do algoritmo.

Variável Auxiliar	Definição
C	Velocidade de propagação da onda c (m/s)
DY	Incremento em y (Δy, m)
DT	Incremento em t (Δt, s)
R	$(c\Delta t/\Delta y)^2$

Fonte: Autoria própria.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

5.1 EXEMPLO DE VERIFICAÇÃO: SOLUÇÃO NUMÉRICA E ANALÍTICA

Considere uma coluna engastada na sua base e submetida a um carregamento periódico de intensidade P (Eq. 1) na sua extremidade livre. O movimento harmônico do carregamento é

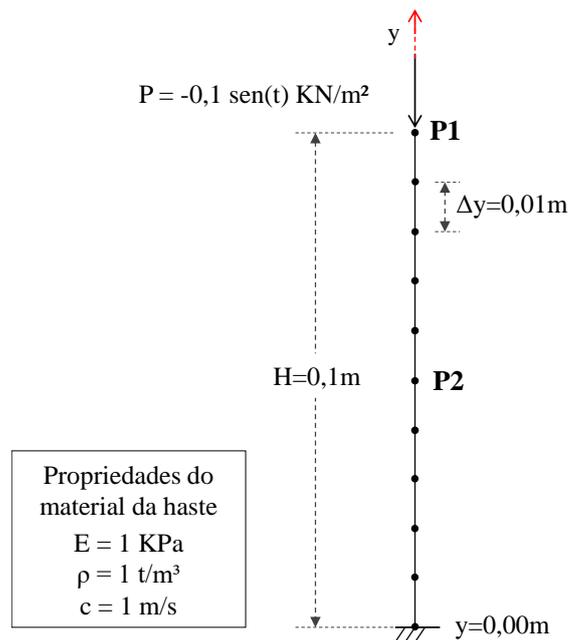
caracterizado por uma frequência angular ω de 1rad/s e amplitude de carregamento p_0 no valor de 0,1KN/m².

A coluna, de 0,1m de altura (H), é constituída homogêneo, isotrópico com comportamento linear elástico com módulo de Young (E) de 1KPa e densidade (ρ) de 1t/m³. A velocidade de propagação da onda (c), definida a partir das propriedades do meio (Eq. 5), é de 1m/s.

Para a obtenção da solução numérica, a coluna foi discretizada em 11 pontos (Fig. 3), resultando em uma discretização espacial (Δy) de 0,01m. A marcha explícita no tempo foi feita adotando um incremento de tempo (Δt) de 0,005s, inferior ao Δt_{crit} (Eq. 22) de 0,01s.

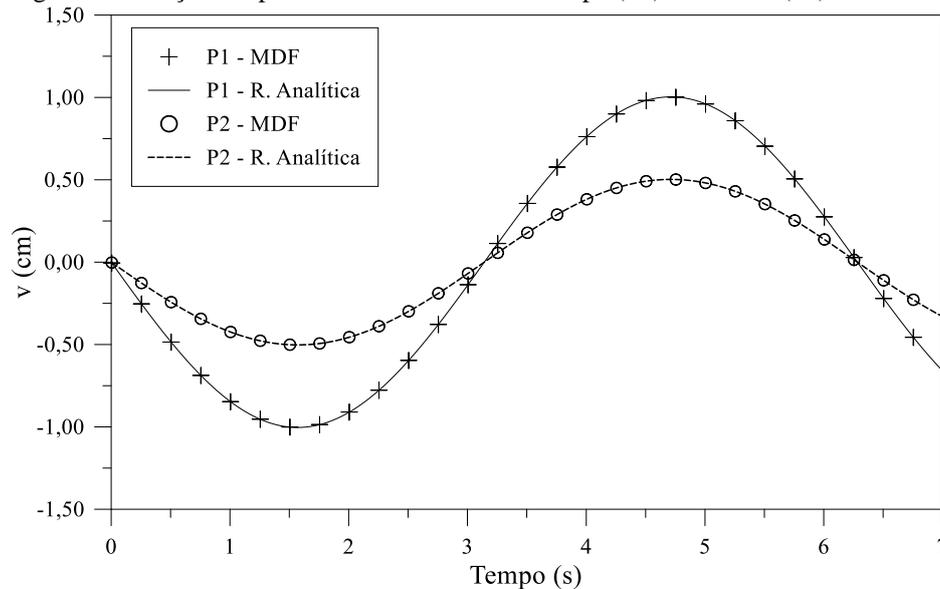
A Fig. 4 mostra a variação temporal dos deslocamentos obtidos, analítica e numericamente, para os pontos P1 (no topo da coluna em $y=H$), e P2 (no meio da coluna em $y=H/2$). Observa-se que as soluções numéricas concordam com as soluções obtidas analiticamente. Portanto, conclui-se que o modelo computacional implementado se mostra como um bom estimador para a solução de problemas mecânicos unidimensionais de equilíbrio dinâmico. Vale ressaltar que todos os parâmetros do problema e da malha apresentados neste exemplo de verificação, assim como os parâmetros de discretização no tempo, são tomados como solução de referência na análise dos próximos cenários.

Figura 3. Representação da discretização da coluna.



Fonte: Autoria própria.

Figura 4. Variação temporal dos deslocamentos no topo (P1) e no meio (P2) da coluna.



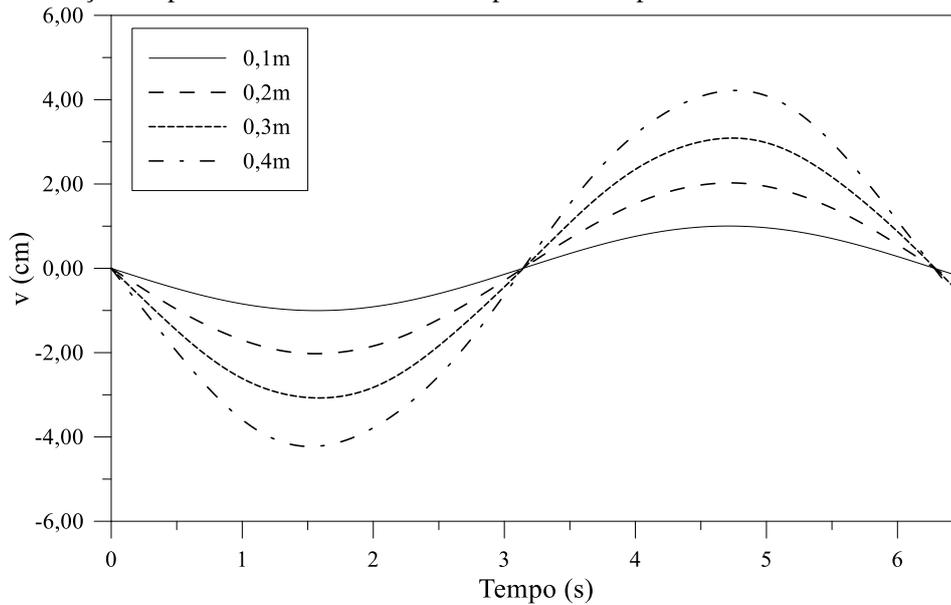
Fonte: Autoria própria.

5.2 EFEITO DA VARIAÇÃO DA ALTURA DA HASTE

A fim de analisar o efeito da altura da coluna sobre a amplitude dos deslocamentos v gerados, foi realizada uma comparação entre os deslocamentos ocorridos no ponto P1 (no topo da coluna em $y=H$), para colunas com diferentes alturas 0,1; 0,2; 0,3 e 0,4m; mantendo-se as mesmas propriedades (E e ρ) e o mesma intensidade de carregamento harmônico (ω e p_0). Uma vez que a altura da coluna varia, é necessário aumentar o número de pontos nodais a fim de que a mesma discretização espacial ($\Delta y=0,01m$) e a mesma velocidade de propagação seja adotadas em todas as análises. Dessa forma, para as colunas de 0,1; 0,2; 0,3 e 0,4m foram utilizados, respectivamente, 11, 21, 31 e 41 pontos nodais.

A partir da Fig. 5, é possível observar que com o aumento da altura da coluna, aumenta-se, também, a amplitude dos deslocamentos. O mesmo pode ser observado na Tabela 1, onde são apresentados os deslocamentos máximos ($v_{m\acute{a}x}$) obtidos para cada coluna.

Figura 5. Variação temporal dos deslocamentos no topo da coluna para colunas de diferentes alturas.



Fonte: Autoria própria.

Tabela 1: Deslocamentos máximos ($v_{m\acute{a}x}$) para as colunas de diferentes alturas.

H (m)	0,1	0,2	0,3	0,4
$v_{m\acute{a}x}$ (cm)	1,003	2,026	3,089	4,219

Fonte: Autoria própria.

5.2 EFEITO DA VARIAÇÃO DA DEFORMABILIDADE DA COLUNA

Para avaliar o efeito da deformabilidade da coluna na amplitude dos movimentos, variou-se o módulo de Young (E) entre os valores de 1,0; 2,0; 3,0 e 4,0KPa, mantendo-se constante a altura (H), a densidade (ρ) e o mesma intensidade de carregamento harmônico (ω e p_0). o mesma intensidade de carregamento harmônico (ω e p_0). Ao variar o valor do módulo de elasticidade, automaticamente, altera-se o valor da velocidade de propagação da onda conduzindo a 1,00; 1,41; 1,73 e 2,00m/s, respectivamente, de acordo com a Eq. 5.

Conforme citado anteriormente, para garantir a estabilidade e convergência da solução numérica é necessário que o incremento de tempo adotado seja menor ou igual ao incremento de tempo crítico, dependente de Δy e c , de acordo com a Eq. 22. Dessa forma, ao variar as características do material, o Δt_{crit} para cada malha varia conforme apresentado na Tab. 2. Uma vez que o incremento de tempo adotado é $\Delta t=0,005s$, a convergência e a estabilidade da solução numérica está garantida em todas as análises.

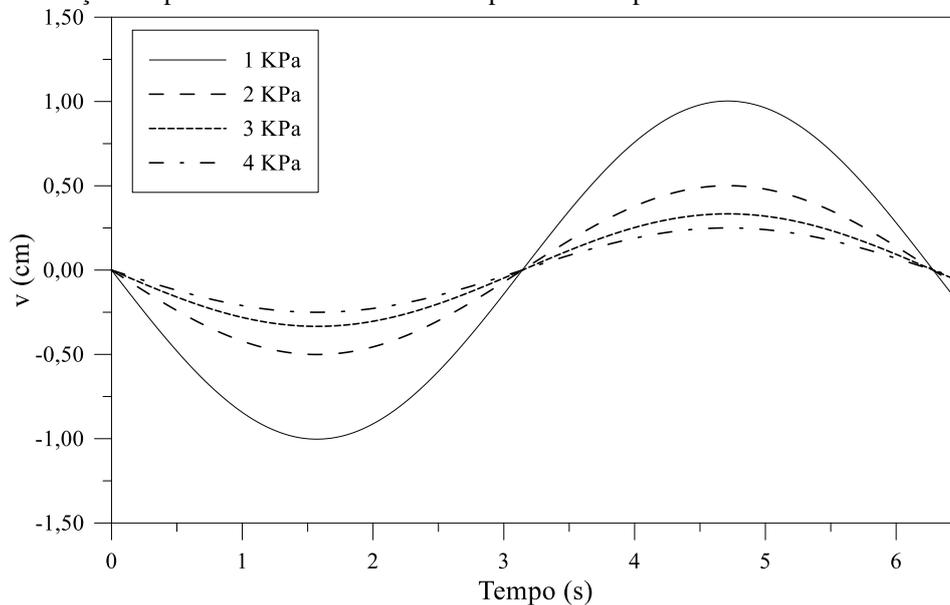
Tabela 2: Cálculo do Δt_{crit} para os diferentes tipos de materiais.

E (KPa)	c (m/s)	Δt_{crit} (s)
1,0	1,00	0,010
2,0	1,41	0,007
3,0	1,73	0,006
4,0	2,00	0,005

Fonte: Autoria própria.

A variação temporal dos deslocamentos no topo da coluna (ponto P1) para os diferentes módulos de elasticidade é a apresentado na Fig. 6. Com o aumento da velocidade de propagação da onda causada pelo aumento do módulo de elasticidade dos materiais, a amplitude dos deslocamentos tende a diminuir. A Tab. 3 apresenta os deslocamentos máximos ($v_{m\acute{a}x}$) que ocorrem no topo da coluna. Pode-se observar que estes deslocamentos são inversamente proporcionais ao aumento do módulo de elasticidade de forma que, ao aumentar duas vezes o módulo de elasticidade, os deslocamentos diminuem pela metade e assim por diante. Da mesma forma, ao analisar a velocidade de propagação da onda, observa-se que essa relação é indiretamente proporcional.

Figura 6. Variação temporal dos deslocamentos no topo da coluna para diferentes módulos de elasticidade.



Fonte: Autoria própria

Tabela 3: Deslocamentos máximos ($v_{m\acute{a}x}$) para as colunas de diferentes módulos de elasticidade.

E (KPa)	1,0	2,0	3,0	4,0
c (m/s)	1,00	1,41	1,73	2,00
$v_{m\acute{a}x}$ (cm)	1,003	0,501	0,334	0,250

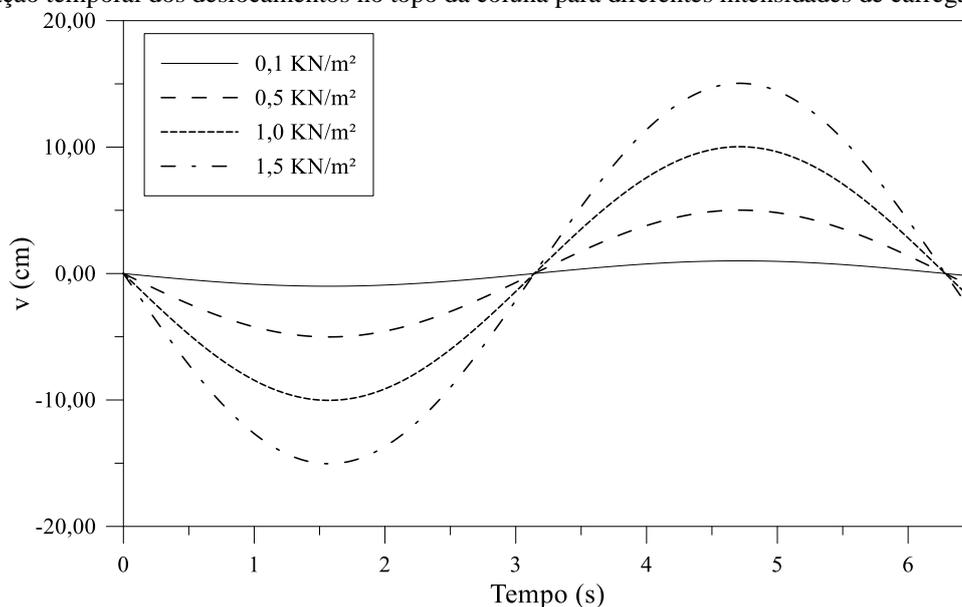
Fonte: Autoria própria.

5.3 EFEITO DA VARIAÇÃO DA INTENSIDADE DO CARREGAMENTO PERIÓDICO

A fim de avaliar o efeito da variação da intensidade do carregamento periódico nos deslocamentos da coluna, foram mantidos a altura (H), o módulo de Young (E), a densidade (ρ) e variada as amplitudes do carregamento (p_0) entre 0,1; 0,5; 1,0 e 1,5KN/m².

Na Fig. 7 são representados os resultados de deslocamentos encontrados. Observa-se que quanto maior o valor do carregamento periódico aplicado, maiores são as amplitudes de deslocamentos. A Tab. 4 mostra os deslocamentos máximos ($v_{m\acute{a}x}$) no topo da coluna. Observa-se que eles são diretamente proporcionais ao aumento da intensidade do carregamento periódico de forma que, ao aumentar cinco vezes o valor de p_0 , os deslocamentos, da mesma forma, aumentam em cinco vezes e assim por diante.

Figura 7. Variação temporal dos deslocamentos no topo da coluna para diferentes intensidades de carregamento periódico.



Fonte: Autoria própria.

Tabela 4: Deslocamentos máximos ($v_{m\acute{a}x}$) para diferentes intensidades de carregamento periódico.

p_0 (KN/m ²)	0,1	0,5	1,0	1,5
$v_{m\acute{a}x}$	1,003	5,015	10,020	15,045

Fonte: Autoria própria.

6 CONCLUSÃO

O estudo da propagação de ondas mecânicas se mostra relevante em diversas áreas da engenharia. Assim como grande parte dos problemas físicos na engenharia, a propagação das ondas mecânicas é modelada por um sistema de equações diferenciais parciais cuja solução analítica só se torna viável para condições de contorno e de carregamento simplificadas. Soluções para problemas complexos são, comumente, aproximadas através de métodos numéricos.

Diante desse contexto, neste trabalho foi apresentada um modelo computacional com base numa aproximação explícita do método das diferenças finitas para resolução de problemas mecânicos unidimensionais de equilíbrio dinâmico. É importante enfatizar a importância na definição adequada da discretização temporal e espacial a fim de garantir a convergência e a estabilidade da solução obtida explicitamente.

Os modelos numérico e computacional foram validados comparando-se os deslocamentos obtidos numérica e analiticamente para uma coluna engastada em sua base e submetida a um carregamento periódico em sua extremidade livre. Os resultados apresentaram uma boa concordância.

Um estudo paramétrico variando-se a altura, a velocidade de propagação da onda e a intensidade do carregamento periódico na amplitude de movimento da coluna mostram a versatilidade do MDF e da metodologia de análise aplicadas.

REFERÊNCIAS

- ANTUNES, A. J. M.; LEAL-TOLEDO, R. C. P.; SILVEIRA FILHO, O. T.; TOLEDO, E. M. Método de diferenças finitas para a equação de onda acústica utilizando passos de tempo ajustados localmente. In: Simpósio de Mecânica Computacional, 11., 2014, Juiz de Fora. *Anais eletrônicos...* Juiz de Fora: 2014. Disponível em: <https://www.ufjf.br/simmec-emmcomp-2014/files/2014/05/simmec-emmcomp-2014_submission_77.pdf>. Acesso em: 20 maio 2020.
- FIGUEIREDO, F. B.; Figueiredo, N. L. B.; MELLO, A. F. A.; SOUZA, L. A. F.; VANALLI, L. Determinação numérica e experimental da frequência natural de vigas de concreto armado. *Braz. J. of Develop.*, Curitiba, v. 6, n. 4, p.17931-17946, apr. 2020. DOI:10.34117/bjdv6n4-095.
- GOU, Y.; SHI, X.; ZHOU, J.; QIU, X.; CHEN, X.; HUO, X. Attenuation assessment of blast-induced vibrations derived from an underground mine. *Int J Rock Mech Min Sci.* 2020;127(February):104220. doi:10.1016/j.ijrmms.2020.104220
- GUI, Y. L.; ZHAO, Z. Y.; JAYASINGHE, L. B.; ZHOU, H. Y.; GOH, A. T. C.; TAO, M. Blast wave induced spatial variation of ground vibration considering field geological conditions. *Int J Rock Mech Min Sci.* 2018;101(August 2016):63-68. doi:10.1016/j.ijrmms.2017.11.016.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos de física 2: Gravitação, Ondas e Termodinâmica*. 4. Ed. Editora LTC, 2009.
- SANTOS, R. M. G. *Visualização de Fenômenos de propagação de ondas mecânicas em meio contínuo*. 2011. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2011.
- THOALDO, D. C.; CARRER, J. A. M. Equação da onda escalar pelo método dos elementos de contorno: uma aproximação do MEC-d para problemas unidimensionais. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, Buenos Aires, Vol XXIX, p. 2613-2621, 2010. Disponível em: <<https://amcaonline.org.ar/ojs/index.php/mc/article/viewFile/3179/3106>>. Acesso em: 20 maio 2020.

VERRUIJT, A. *Introduction to soil dynamics*. Springer Netherlands, 2009.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações Diferenciais*. v. 2. São Paulo: Editora Makron Books, 2001.

ZORZAL, C. B.; NOGUEIRA, C. L. ; LIMA, H. M. ; VASCONCELOS, L. A. C. . Numerical analysis of blast-induced ground vibrations. In: International Congress on Rock Mechanics and Rock Engineering, 14., 2019, Foz do Iguaçu. Rock Mechanics for Natural Resources and Infrastructure Development. London: CRC Press, 2019. v. 6. p. 3001-3010.