Uma investigação sobre a ideia de número

An investigation about the idea of number

DOI:10.34117/bjdv7n3-361

Recebimento dos originais: 15/02/2021
Aceitação para publicação: 15/03/2021

Márcio Roberto Rocha Ribeiro
Doutor em Matemática pela Universidade de Brasília (UnB)
Instituição: Universidade Federal de Catalão – UFCAT
Endereço: Av. Dr. Lamartine Pinto de Avelar, 1120, setor Universitário – CEP: 75704-020
E-mail: marcio.ribeiro@ufg.br

Fabrício Oliveira Silva
Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (UFG)
Instituição: Escola Estadual Osmundo Gonzaga Filho
Endereço: Rua 29 Q. 28 L. 14, S/N, Estância Boa Vista – Caldas Novas, GO - CEP: 75682-404
E-mail: dante_1306@hotmail.com

Paulo Roberto Bergamaschi
Doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal de Uberlândia (UFU)
Instituição: Universidade Federal de Catalão – UFCAT
Endereço: Av. Dr. Lamartine Pinto de Avelar, 1120, setor Universitário – CEP: 75704-020
E-mail: prbergamaschi@ufg.br

Porfírio Azevedo dos Santos Júnior
Doutor em Matemática pela Universidade de Brasília (UnB)
Instituição: Universidade Federal de Catalão – UFCAT
Endereço: Av. Dr. Lamartine Pinto de Avelar, 1120, setor Universitário – CEP: 75704-020
E-mail: porfirio_junior@ufg.br

Rogério Azevedo Rocha
Doutor em Eng. de Sistemas e Computação pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)
Universidade Federal do Tocantins – UFT
Endereço: Campus Universitário de Palmas, Centro, Palma-TO – CEP: 77020-210
E-mail: azevedo@mail.uft.edu.br

Hellena Christina Fernandes Apolinário
Doutora em Eng. de Sistemas e Computação pela Universidade Federal do R. de Janeiro (UFRJ)
Instituição: Universidade Federal do Tocantins – UFT
Endereço: Campus Universitário de Palmas, Centro, Palma-TO – CEP: 77020-210
E-mail: hellena@uft.edu.br

Élida Alves da Silva
Doutora em Matemática pela Universidade de Brasília (UnB)
Instituição: Universidade Federal de Catalão – UFCAT
Endereço: Av. Dr. Lamartine Pinto de Avelar, 1120, setor Universitário – CEP: 75704-020
E-mail: elida_alves@ufg.br

RESUMO
Neste trabalho trazemos à tona uma indagação milenar a respeito do que são os números. Evidenciamos como esta é uma questão historicamente controversa, que encontra compreensões diversificadas nos campos da filosofia, matemática e filosofia da matemática. Apresentamos um percurso histórico da construção da ideia de número, desde o período paleolítico chegando até ao final do século dezenove quando os matemáticos reavaliaram os fundamentos da matemática e elevaram as ideias ao patamar das linguagens mais rigorosas envolvendo a lógica. Frege (1884) em sua obra "*Os Fundamentos da Aritmética*", pretendeu explicar e justificar a real natureza da ideia de número sem apelar à geometria. Além dele, destacamos neste trabalho as belíssimas ideias e as importantes contribuições de Bertrand Russell, Hilbert, Dedekind e Peano na construção da ideia de número. A abordagem racional dos conceitos e a validação deles por métodos racionais sem utilizar experimentos sensoriais, são estudos tanto filosóficos quanto matemáticos e neste trabalho procuramos trazer um pouco de luz à estas ideias, reconhecendo a relevância de uma compreensão mais estruturada e mais aprofundada da ideia de número. A metodologia utilizada no desenvolvimento do trabalho foi a da pesquisa bibliográfica. O objetivo central deste trabalho é, portanto, trazer resposta à questão que compreende e circunscreve perspectivas histórica, filosófica e matemática, a saber, "afinal, o que são números? " e, concomitantemente, apresentar uma substancial reflexão acerca da construção da ideia de número, buscando contribuir com uma fundamentação da construção da própria matemática como ciência. E assim, o que se espera é propiciar uma ferramenta que possa subsidiar reflexões e indagações a respeito da construção da ideia de número.

Palavras-Chave: Matemática, Número, Filosofia.

ABSTRACT
In this work we bring up an age-old question about what numbers are. We have highlighted how this is a historically controversial issue, which finds diverse understandings in the fields of philosophy, mathematics and philosophy of mathematics. We present a historical journey of the construction of the idea of number, from the Paleolithic period until the end of the nineteenth century when mathematicians reevaluated the foundations of mathematics and raised ideas to the level the most rigorous languages involving logic. Frege (1884) in his work "The Fundamentals of Arithmetic" intended to explain and justify the real nature of the idea of number without appealing to geometry. In addition to this, we highlight in this work the beautiful ideas and the important contributions of Bertrand Russell, Hilbert, Dedekind and Peano in the construction of the idea of number. The rational approach to concepts and their validation by rational methods without using sensory experiments, are both philosophical and mathematical studies and in this work we seek

to bring a little light to these ideas, recognizing the relevance of a more structured and deeper understanding of the idea of number. The methodology used in the development of the work is bibliographic research. The central objective of this work is, therefore, to answer the question that understands and circumscribes historical, philosophical and mathematical perspectives, namely, “after all, what are numbers?” and, concomitantly, present a substantial reflection on the construction of the idea of number, seeking to contribute with a foundation for the construction of mathematics itself as a science. Therefore, what is expected is to provide a tool that can support reflections and inquiries regarding the construction of the idea of number.

Keywords: Mathematic, Number, Philosophy.

1 INTRODUÇÃO

Uma motivação inicial para abordagem do tema advém de observações a respeito de algumas ideias estabelecidas de forma elementar e amplamente aceitas sobre o que vem a ser–número, como a que atesta o número como objeto que nos permite efetuar o processo de contagem, entendendo objeto como uma *realidade percebida* ou *conceito pensado*, conforme Abbagnano (2007, p. 723). Também, ao responder indagações do tipo: quantos são? o número é tido como cardinal de alguma coleção, pois descreve a quantidade de elementos pertinentes à referida coleção. Contudo, o número pode ser encarado sob outra perspectiva, pois se numa corrida participam três alunos, o três é cardinal. Ao mencionar que o aluno Pedro chegou em terceiro lugar, o três é um ordinal, ou seja, é um conceito para localizar um termo numa sequência ordenada.

A ideia de número aparece também em registros de objetos e documentos pessoais, como: o número do celular, o número do Cadastro de Pessoa Física (CPF), o número do Registro Geral (RG), o número do Cartão de Crédito, o número da Conta Bancária, o número do Código de Barras, etc. Esses objetos utilizam números, não por ser cardinal ou ordinal, pois o número do celular começa com o código de área regional, seguido da operadora de origem, o CPF permite acessar informações individuais de cada cidadão a partir da revelação de sua sequência numérica. Algo semelhante ocorre para os números relativos aos demais objetos: RG, cartão de crédito, conta bancária, códigos de barra, etc. Portanto, os números não podem ser considerados apenas como objetos necessários para efetuar contagens, pois eles são capazes de agregar informações.

Outra motivação essencial para este estudo foi a percepção da dificuldade que qualquer pessoa encontra ao tentar responder à questão: *o que é número?* Tivemos a curiosidade de apresentar este questionamento a algumas pessoas e as respostas se limitaram basicamente ao bojo das entidades com atributos de contagem, de ordenação e de medida, o que condiz com o que tem sido apresentado nos livros didáticos da rede de ensino no Brasil, ao menos naqueles em que pesquisamos.

O contraste intrigante está no fato de a matemática ser notabilizada por definir rigorosamente seus objetos de estudo, contudo, quando buscamos pelo conceito de número, deparamo-nos com uma lacuna ressonante, um vazio, algo que turva o rigor e a clareza matemática. Acreditamos que a história e a filosofia matemática possam lançar um pouco de luz para entendermos o motivo de assim ser. Portanto, o objetivo central do trabalho é apresentar um percurso histórico e filosófico matemático acerca da construção da ideia de número visando contribuir com uma fundamentação mais aprofundada desta ideia.

A metodologia utilizada no desenvolvimento deste artigo foi a realização de uma coleta de informações bibliográficas visando um trabalho descritivo e uma abordagem qualitativa. Portanto, trata-se de uma pesquisa bibliográfica na qual buscamos aprofundar o conhecimento disponível na ciência, procurando preencher a ausência de estudo sobre os aspectos do tema em voga, caracterizada pela análise de conceitos e sistematização de ideias visando a transformação do saber. Ressaltamos que este artigo está fortemente fundamentado na dissertação de mestrado de Silva (2020).

2 OS PRIMÓRDIOS DO DESENVOLVIMENTO DA IDEIA DE NÚMERO

O Período Paleolítico compreende de três milhões de anos a doze mil anos antes da Era Comum. Eves (2004, p. 22) comenta que achados arqueológicos desse período dão provas que os humanos efetuavam contagens e medições. Pinturas rupestres, contendo riscos paralelos, são as primeiras formas de representar quantidades, essas representações primitivas são relações biunívocas.

As contagens possuíam motivações práticas, como medir o tempo, a quantidade de pessoas numa caçada, quantidade de presas abatidas, além do conhecimento dos intervalos de tempo pelas fases lunares e as estações do ano como períodos de secas e chuvas.

Para Eves (2004, p. 23) os homens necessitaram contar as fases da lua e os períodos de secas e de chuvas. O domínio dessa técnica é de vital importância para a sobrevivência em ambientes hostis. Os povos desse período eram nômades, viajavam orientados pelos astros celestes por terem desenvolvido uma capacidade de orientação espacial. Por mais primitivo que os agrupamentos humanos fossem no período Paleolítico, o processo de contagem era uma ferramenta vital para a sobrevivência nos ambientes primitivos, sujeitos aos caprichos do clima e das estações. O relacionamento humano com os números começou, portanto, nos primórdios de nossa espécie.

No Período Neolítico, que para Eves (2004, p. 24) vai de doze mil anos a cinco mil anos antes da Era Comum, os seres humanos passaram a ser sedentários. Essa mudança no modo de vida é atribuída à Revolução Agrícola, que garantiu o fornecimento de alimentos para o homem o ano todo. A agricultura é o ponto de virada no estilo de vida desses povos, de caçadores e coletores a domesticadores e cultivadores. A abundância de alimentos e a necessidade de cuidados ininterruptos dos campos de cultivo, mesmo nos períodos de entressafra, obrigou o ser humano a estabelecer morada definitiva na região de cultivo.

O ambiente em torno dessas moradas era um cenário que necessitava dos números, para contar a fartura, a divisão da colheita e os animais do rebanho pastoreado. Para Roque (2012, p. 33-34) “não foi somente o inventário de animais em rebanhos a maior inspiração para a criação dos números, e sim o registro de quantidades de insumos relacionados à sobrevivência e a necessidade de organizar a sociedade”.

Garbi (2007, p. 6) comenta que a vida urbana deixou as relações humanas mais complexas e o aumento da necessidade de contar foi um motivador para a invenção da escrita e do sistema de numeração posicional. A numeração posicional trouxe aos povos antigos a possibilidade de representar valores, utilizando combinações de poucos símbolos. Esses símbolos representavam quantidades concretas ou abstratas de objetos. As possibilidades de utilização dessa simbologia são vastas, como predizer quantidades futuras, organizar observações, calcular impostos, montar calendários e outros.

A escrita e o sistema posicional foram muito importantes na jornada humana, enquanto a primeira marca o fim da pré-história, a segunda possibilitou o registro de qualquer quantidade com o uso de poucos símbolos e, nesse contexto, o número passa a ser um objeto abstrato. Em paralelo com o sistema posicional dos mesopotâmicos, florescia no norte da África a civilização egípcia que desenvolveu um sistema matemático que auxiliou os indivíduos em suas atividades diárias. A matemática utilizada pelos mesopotâmicos e egípcios era empírica, esses povos utilizavam os números no intuito de descrever quantidades, ordem e medidas.

É no século XII, antes da Era Comum, que surge a civilização grega na Europa. Os gregos influenciaram e influenciam o modo de vida ocidental e o desenvolvimento da ideia de número passa, necessariamente, pelo pensamento grego como podemos ver na seção seguinte.

3 DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO GREGO

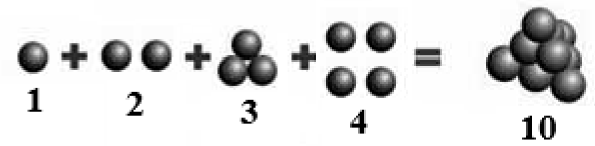
Eves (2004, p. 94) cita que a civilização grega desenvolve um conhecimento intelectual, abordando a realidade física através de investigações rigorosas e racionais. Esse método investigativo, posteriormente, foi chamado de filosofia. Estudiosos gregos aprenderam a matemática desenvolvida pelos mesopotâmicos e egípcios e aplicaram investigações de cunho mais rigoroso nos estudos matemáticos, determinando que a veracidade de qualquer afirmação deveria ser provada.

O desenvolvimento matemático na Grécia, caracterizado pela introdução de um certo rigor, tem início no século VI antes da Era Comum, com Tales. Antes dele, o conhecimento matemático tinha um viés prático, empírico. Contudo, os pitagóricos foram os primeiros estudiosos a relacionar o embasamento racional de Tales nas definições matemáticas e nas justificativas das afirmações matemáticas.

Singh (1999, p. 33) descreve que a irmandade dos pitagóricos era um grupo fraterno e religioso, com regras precisas de convivência e de comportamento. Aristóteles (2006, p. 56) comenta que, na ótica pitagórica, o número é o elemento básico da realidade, pois tudo que existe é radicado a números. Os números figurados, que são pontos dispostos para formar linhas, triângulos, quadrados e outras formas geométricas, são categorizados em: pares, ímpares, perfeitos, triangulares, quadrados e outros, a mesma classificação utilizada pela Aritmética.

Ao analisarmos números figurados notamos uma relação direta entre as formas geométricas com quantidades. Os pitagóricos não diferenciavam formas e números. O tetractis, apresentado na Figura 1, é a joia do seu sistema místico sendo a soma da unidade 1 com o linear 2, com o triangular 3 e com o quadrado 4, resultando na dezena 10, “a dezena é considerada uma coisa completa” (ARISTÓTELES, 2006, p. 26). O tetractis representa o Cosmo ordenado e completo.

Figura 1- Tetractis.



Fonte: adaptação de Matemelga, (2015).

Os pitagóricos influenciaram estudiosos da Grécia, um deles foi o filosofo Platão, que estudou matemática com os membros daquela irmandade. Silva (2007, p. 38) destaca que, para Platão, os números compreendem a perfeição na realidade ideal e o ser humano compreende a ideia de número pelo raciocínio. A concepção platônica foi uma das primeiras a explicar a ideia de número, sem recorrer à quantidade. Os pitagóricos também atuavam na mesma linha de raciocínio, contudo, o sistema figurativo é um sistema empírico abstrato, enquanto as definições platônicas eram puramente abstratas. A natureza a priori do seu sistema filosófico, explica a condição da ideia de número como uma ideia que sempre existiu e nunca mudou. Os números seriam reflexos de ideias perfeitas, cuja compreensão se daria somente pelo raciocínio. A ideia numérica de Platão não acata a experiência prática na estruturação de qualquer conhecimento matemático o que gerou críticas contundentes por parte de Aristóteles.

Os números que utilizamos como medidas, os gregos denominavam grandezas, tais como: o tamanho de um segmento, a superfície e o espaço de um sólido. Duas grandezas de mesma espécie quando comparadas eram denominadas razão, como exposto na definição três do Livro V de Euclides “uma razão é um tipo de relação que diz respeito ao tamanho de duas grandezas do mesmo tipo” (EUCLIDES, 2009, p. 205).

Em relação ao desenvolvimento da ideia de número, não destacamos fatos importantes no período que segue até o final da Idade Média e início da modernidade, apesar da relevante lista de nomes importantes para o desenvolvimento da matemática neste período, tais como: Diofanto de Alexandria, Nicolau Copérnico, Galileu Galilei, René Decartes, Pierre de Fermat e Blaise Pascal. Assim, na próxima seção passamos a abordar o momento em que a matemática se volta para a formalização da ideia de número.

4 EMBASAMENTO LÓGICO DA IDEIA DE NÚMERO

A aritmetização da Análise Matemática no século XIX depois da Era Comum, libertou o cálculo das definições geométricas e dos infinitésimos. Cauchy formalizou o conceito de limites de funções, dando uma definição precisa e excluindo o uso da geometria, de números infinitesimais ou de velocidades.

> [...] a completa aritmetização da análise só se tornou possível quando, como Hankel previra, os matemáticos compreenderam que os números reais devem ser encarados como 'estruturas intelectuais' e não como grandezas intuitivamente dadas, legadas pela geometria de Euclides (BOYER, 2012, p. 393).

No final da década de 1870, Frege inicia a investigação das estruturas aritméticas, abandonando qualquer rigor geométrico. Na visão de Frege, definindo rigorosamente os números naturais, estaríamos diante dos subsídios necessários e suficientes para a compreensão de todos os outros tipos de números.

4.1 LOGICISMO DE FREGE

Frege expressa seu incômodo com a fato dos matemáticos não chegarem a um acordo em relação à natureza dos números. "Não constituirá então uma vergonha para a Ciência estar tão pouco elucidada acerca do seu objeto mais próximo, o qual deveria, aparentemente, ser tão simples? Menos provável ainda é que se seja capaz de dizer o que o número é" (FREGE, 1992, p. 30). Na obra *Os Fundamentos da Aritmética*, de 1884, Frege propõe que a Aritmética deveria ser entendida como um ramo da Lógica, pois com as operações aritméticas chegamos na conclusão das sentenças apenas analisando seus termos, exemplo: $(2 + 7) = 9$. O silogismo opera da mesma forma, a conclusão está inserida nas premissas bastando analisar as sentenças para deduzir a conclusão. Frege define o conhecimento aritmético de juízo analítico. Como a compreensão da Aritmética não depende da experiência, deduz que esse conhecimento é *a priori*.

Frege (1992, p. 78) determina que número não é propriedade das coisas exteriores e não é subjetivo. O número é um objeto lógico que é atribuído a conceitos. Assim, o número *um* é atributo comum a todos os objetos que caem sobre o conceito de unidade. Os objetos caem sobre o atributo do conceito por terem a mesma cardinalidade, ou a relação de 1 para 1e, neste ponto, Frege utilizou a cardinalidade sem se valer da ideia de número natural. Essa ideia o levou ao conhecido ***Princípio de***

Hume, que enuncia: *para quaisquer conceitos **F** e **G**, o número de **F** é idêntico ao número de **G** se, somente se, **F** e **G** são equinumerosos.* A equinumerosidade é o que hoje denominamos correspondência biunívoca.

A notação utilizada por Frege para este princípio é $\boldsymbol{NxFx = NxGx \Leftrightarrow F \approx G}$, onde $\approx$ denota uma relação biunívoca entre **F** e **G** e $\boldsymbol{x}$ é um objeto. Esse princípio enunciado por Frege é um operador de cardinalidade.

O desenvolvimento do projeto logicista de Frege dependia do *Princípio de Hume*. Shapiro (2016, p. 164) aborda um problema que ficou conhecido como o problema de Júlio César, no qual se percebe que o *Princípio de Hume* é incapaz de determinar se o número dois é idêntico a um conjunto arbitrário ou a *Júlio César*. Silva (2007, p. 131) comenta que a falta de um princípio de identidade para os números, implicou na questão: sendo os números objetos lógicos que existem apenas no contexto da Lógica, o que são exatamente esses objetos lógicos?

A solução apresentada para o problema de Júlio César foi a introdução da ideia de extensão de um conceito, que é o universo dos objetos que esse conceito designa. Então, dado um conceito ***D*** a extensão de ***D (ext D)*** são todos objetos que caem sobre esse conceito, devido a suas características. O número que pertence ao conceito ***D*** é a extensão do conceito**.** Desta forma, ficaria claro que Júlio César não é um número, por não ser uma extensão de um conceito numérico.

A extensão de um conceito é a coleção de todos os objetos que detém o atributo relacionado ao conceito. Essa coleção é uma classe e Halmos afirma que “uma classe pode ser identificada com a condição, ou melhor, com a ‘**extensão**’ de uma condição” (HALMOS, 2001, p. 18).

Segundo Shapiro (2016, p. 167) em 1893 Frege publica a obra *Grundgesetze der Arithmetik* (Leis Básicas da Aritmética), onde é apresentada a Lei Básica V: as extensões de dois conceitos são idênticas se, e só se, esses conceitos se aplicam as mesmas coisas. Ou de forma mais simples, qualquer extensão de conceito determina uma classe. Porém, essa lei conduz à seguinte contradição: *pode existir uma classe definida por um conceito D, com elementos que recaem na ext D, apenas no caso do conceito D não os designar*. Por exemplo, tome a propriedade: **W** é a classe das classes que não contém a si própria. Essa classe conterá a si própria somente caso não se contiver. E não conterá a si própria caso se contiver. Essa propriedade ficou conhecida como paradoxo de Russell. Essa descoberta foi comunicada em uma carta à Frege por Russell decretando o fim do projeto logicista de Frege. Russell era logicista, assim como Frege, e continuou com os seus estudos no intuito de reduzir a Matemática à Lógica.

4.2 LOGICISMO DE RUSSELL

Bertrand Arthur William Russell foi um logicista, prosseguidor do projeto de Frege, ao lado de seu amigo Alfred North Whitehead. Juntos eles escreveram Principia Mathematica e seus estudos tinham por intuito reduzir toda a matemática à lógica. O passo inicial foi continuar com o trabalho de Frege e suas pesquisas na aritmética. Em Introdução à Filosofia da Matemática, Russell afirma que:

> Muitos filósofos, quando tentam definir número, estão na verdade empenhados em definir pluralidade, o que é uma coisa inteiramente diferente. Número é o que é característico dos números, como homem é o que é característico dos homens. Uma pluralidade não é um caso de número, mas de algum número particular. Um trio de homens, por exemplo, é um caso de número 3, e o número 3 é um caso de número; mas o trio não é um caso de número. Esse ponto pode parecer elementar e quase nem merece menção; no entanto, provou-se demasiado sutil para os filósofos, com poucas exceções. [...] Um número é algo que caracteriza certas coleções, a saber, aquelas que têm aquele número. (RUSSELL, 2007, p. 28).

Existem semelhanças entre a definição de número de Frege com a definição de Russell, mas a definição desse último é o princípio da extensão, pois ele está falando de caracterizar coleções, não necessariamente pela enumeração de objetos. Nas palavras de Russell:

> Em vez de falar de uma 'coleção', falaremos em geral de uma 'classe' ou por vezes de um 'conjunto'. Outras palavras usadas em matemática para a mesma coisa são 'agregado' e 'múltiplo'. Teremos muito a dizer mais tarde sobre classes. [...] Uma classe ou coleção pode ser definida de duas maneiras, podemos enumerar seus membros, ou podemos mencionar uma propriedade definidora. (RUSSELL, 2007, p. 29).

Russell definiu número como *uma classe de classes com os mesmos números de membros* ou, de forma mais precisa, número caracteriza uma classe. Definiu intencionalmente uma classe em que seus membros se relacionam biunivocamente com a classe numérica. Ao definir classe, Russell teve o cuidado de evitar os caminhos que levaram ao paradoxo que ele próprio obteve. A solução foi a teoria dos tipos, que define o indivíduo como um objeto que não é uma classe. Assim, o que afirmamos de um objeto não se estende à classe desses objetos. A sentença: "*a classe dos homens é um homem"* não faz sentido, pois o que pode ser dito de indivíduos não poderá ser dito da classe e vice e versa. Existe uma hierarquia de tipos e quando essa hierarquia é observada o Paradoxo de Russell desaparece. Sua teoria dos tipos evitava as definições *impredicativas*, isto é, uma definição autorreferenciável, ou ainda, “a definição do membro de uma classe que referencia à totalidade dos membros da classe e que, portanto, contém um círculo vicioso” (ABBAGNANO, 2007, p. 547). Frege aceitava esse tipo de definição, pois classe de classes que não contém a si mesma é uma definição impredicativa.

Russell expressou sua ideia de número, mas ele não explicou o tipo de número, pois o número associado a uma classe é um número cardinal. A cardinalidade está relacionada à contagem, então é necessário determinar os números naturais sem valer-se de cardinalidade, assim ele utiliza a expressão números indutivos.

> Usaremos a expressão ‘números indutivos’ para designar o mesmo conjunto de que falamos até agora como ‘números naturais’. A expressão ‘números indutivos’ é preferível por servir de lembrete de que a definição desse conjunto de números é obtida a partir da indução matemática. (RUSSELL, 2007, p. 46).

Para Shapiro (2016, p. 171), Russell definiu os números naturais da seguinte forma: ***zero*** é a classe de todas as classes com tantos membros quanto a classe de objetos que não são idênticos a si mesmo. ***Um*** é a classe de todas as classes com tantos membros quanto a classe das classes nulas. ***Dois*** é a classe de todas as classes com tantos membros quanto as classes cujos membros são *zero* e *um*. ***Três*** é a classe de todas as classes com tantos membros quanto as classes cujos membros são *zero*, *um* e *dois* e assim por diante. Temos a mesma equinumerosidade sem valer do conceito de número, por isso define-se ***C*** como a *classe de todas as classes que são* equinumerosas com ***C***.

Cada número natural passa a ser definido como uma classe de classes de indivíduos. O problema é que a série dos números naturais é infinita e ela somente pode ser definida se houver uma quantidade infinita de objetos no universo. Russell resolve esse impasse introduzindo o chamado *Axioma da Infinidade*, segundo o qual: existe um número infinito de objetos no universo. Ou seja, sempre que tivermos um número $\boldsymbol{\delta}$ (delta) de objetos, encontraremos outro objeto e possuiremos uma quantidade $(\boldsymbol{\delta}+\mathbf{1})$ de objetos. Silva (2007, p. 136) menciona que “um axioma lógico não deve ter nada a ver com quantos objetos existem, uma vez que é válido, independentemente da quantidade de objetos”. Sendo necessário infinitos objetos para definir a série dos naturais, a conceituação de Russell e Whitehead não era lógica, mas empírica.

No intuito de abolir paradoxos em seu estudo logicista, Russell evitou as definições impredicativas, seu processo de indução consistia em finitos passos. O problema estava em definir que os números ordinais são infinitos, pois ao utilizar a ideia de classe, que é a extensão de um conceito, não há garantia de que existe um conceito satisfeito por algum atributo infinito. Ele resolveu esse impasse com o axioma da infinidade, o qual afirma que há infinitos indivíduos. Tal axioma possibilitou a Russell, determinar que os números ordinais são infinitos. Consequentemente, como os números indutivos devem ter suas propriedades satisfeitas pelo zero e seus sucessores estabeleceu-se assim a garantia da existência de infinitos números naturais, conforme as palavras de Russell.

> Por nossa definição geral de números cardinais, o número de termos na classe dos números indutivos deve ser “todas as classes similares à classe dos números indutivos”, isto é, esse conjunto de classes é o número dos números indutivos segundo nossas definições. É fácil ver agora que esse número (cardinal) não é um dos números indutivos. Se n for um número indutivo, o número de números de 0 a n (ambos incluídos) será $n + 1$; portanto, o número total de números indutivos será maior do que n, não importando qual dos números indutivos n possa ser. Se arranjarmos os números indutivos numa série em ordem de magnitude, essa série não terá nenhum último termo; mas se n for um número indutivo, toda série cujo campo tiver n termos terá um último termo. (RUSSELL, 2007, p. 102).

O axioma da infinidade é hipotético, nas palavras de Russell (2007, p. 101) “[...] existem coleções infinitas no mundo [...] Embora haja aparentemente várias maneiras pelas quais poderíamos esperar provar esse axioma, há razões para temer que sejam todas falaciosas”. As questões relativas ao infinito trouxeram inúmeros problemas no projeto logicista de Russell. A solução era aceitar novos axiomas hipotéticos, como o axioma da redutibilidade, que lhe possibilitou ignorar a teoria dos tipos estabelecida no início de seu projeto. Esses axiomas hipotéticos não eram lógicos, mas, hipóteses empíricas. Esses entraves em seus estudos limitaram o prosseguimento de suas pesquisas matemáticas. O interesse por questões filosóficas e linguísticas, juntamente com o contato com os estudos de Peano, levaram Russell a abandonar seu projeto logicista, como Frege havia feito antes. Mas diferente de Frege, Russell não acreditava em objetos lógicos, para ele a lógica é uma teoria das formas lógicas e não de objetos lógicos.

> Podemos dizer então que os símbolos para classes são meras conveniências, não representando objetos chamados "classes", e que as classes são, de fato, como as descrições, ficções lógicas, ou (como dizemos) 'símbolos incompletos'. (RUSSELL 2007, p. 216).

O projeto logicista de Russell não foi tão bem-sucedido como o de Frege, não lhe dando a mesma influência na lógica matemática em comparação aos estudos fregeanos. Aparentemente ele foi um dos primeiros matemáticos a notar que essas inconsistências lógicas aparecem nas estruturas matemáticas.

Contudo, foi o matemático italiano Giuseppe Peano que, de forma independente, talvez tenha melhor estruturado as ideias desenvolvidas por Frege e Russell. Ele apresentou um sistema axiomático, reconhecidamente estruturado e eficiente, para evidenciar formalmente a ideia de número.

4.3 TEOREMAS DE DEDEKIND-PEANO

No ano 1889, o matemático italiano Giuseppe Peano publicou o livro *Arithmetices Principia Nova Methodo Exposita*, no qual ele resume as características estruturais dos números naturais em uma lista de axiomas lógicos e simbólicos. Peano admite ter copiado Dedekind, por isso esses axiomas são denominados de Axiomas de Dedekind-Peano. Também vemos similaridades dele com Frege, mas ambos chegaram a mesma conclusão de forma independente.

Richard Dedekind elaborou definições mais rigorosas para os números reais, crente que a Aritmética se fundamenta nas *leis do pensamento*, exposto na sua obra *Was sind und was sollen die Zahlen? (O que são e o que significam os números?)*, publicada em 1888, com a intenção de encontrar um fundamento último da Aritmética em sua capacidade de relacionar objetos. Ao postular que a Aritmética se fundamenta em leis do pensamento, ele a coloca sob uma perspectiva lógica, similar ao seu contemporâneo Frege. Dedekind era opositor ao empirismo nas proposições aritméticas. Para ele, o termo *axioma* é sinônimo de hipótese. Neste sentido, evidenciamos no pensamento de Dedekind, uma perspectiva relacional-estruturalista. Em sua visão os axiomas aritméticos são regras construtivas.

A visão de Dedekind se consolidou com o trabalho de Peano, pois os axiomas de Peano são regras construtivas. Para Russell, foi Peano quem reduziu a matemática pura tradicional à teoria dos números naturais.

> Tendo reduzido toda a matemática pura e tradicional à teoria dos números naturais, o passo seguinte em análise lógica foi reduzir essa teoria ela própria ao menor conjunto de premissas e termos indefinidos de que era possível derivá-la. Esse trabalho foi levado a cabo por Peano. Ele mostrou que toda a teoria dos números naturais podia ser derivada de três ideias primitivas e cinco proposições primitivas além daquelas da lógica pura. Essas três ideias e cinco proposições tornaram-se dessa maneira, por assim dizer, refém de toda matemática pura tradicional. Se elas pudessem ser definidas e provadas em termos de outras, toda a matemática pura também poderia sê-lo. Seu 'peso' lógico, se podemos usar esse termo, é igual ao de toda a série de ciências que foram deduzidas da teoria dos números naturais; a verdade dessa série toda é assegurada se a verdade das cinco proposições primitivas estiver garantida, contando, é claro, que não haja nada errôneo no aparato puramente lógico que também está aí envolvido. O trabalho de análise matemática é extraordinariamente facilitado por esse trabalho de Peano (RUSSELL, 2007, p. 21).

Para iniciar uma teoria é necessário aceitar alguns termos sem os definir, esta é a forma de produzir ciência e não apenas ciência matemática. De fato, conforme Ribeiro et al. (2020), para se definir um termo é necessário fazer referência a outro termo anteriormente definido, este por sua vez fará referência a outro anterior, e assim por diante. Um fator que nos levaria a um processo de regressão infinita o que impediria iniciar qualquer teoria. Em matemática os objetos introduzidos sem definição são ditos *termos primitivos* ou *ideias primitivas.* De maneira análoga, para iniciar uma teoria é necessário aceitar algumas afirmações sem prová-las, estas afirmações são os *axiomas*.

Morgado (2015) comenta que Peano construiu seu sistema de axiomas tomando três termos primitivos, que são: um, número natural e sucessor e cinco proposições primitivas, ou *axiomas*:

i) 1 é um número natural.

ii) Se n é um número natural o sucessor de n, $S(n) = n + 1$ é um número natural.

iii) $S(n) \neq 1$, para todo n natural. (1 não é sucessor de nenhum número natural).

iv) Se $S(m) = S(n)$, então $m = n$. (Naturais distintos têm sucessores distintos).

v) Se $1 \in X$ e se, além disso, $S(n) \in X$, para cada $n \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

Peano toma número natural como noção primitiva, diferente de Frege e Russell que queriam saber o que é número. Os axiomas de Dedekind-Peano não dizem respeito a equinumerosidade. Para Britto (2013, p.30) esses axiomas organizam os números naturais como uma sequência linear simples, de forma que temos como corolário do teorema geral, um teorema de recursão para os números naturais.Os postulados de Peano não caracterizam apenas os números naturais, essa axiomática satisfaz qualquer sequência biunívoca com os naturais.

Britto (2013, p. 28) cita que chegou-se a acreditar que o sistema axiomático apresentado por Peano contemplaria a axiomatização de toda a Aritmética. Contudo, os estudos e resultados obtidos por Gödel sobre a impossibilidade de desenvolver toda a Aritmética em um sistema simultaneamente completo e consistente foram essenciais para mostrar que não. Os resultados destes estudos de Gödel ficaram conhecidos como *teoremas da incompletude*.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A ideia vigente de número se apoia, majoritariamente, em um contexto aritmético onde o termo número não é definido, mas está sujeito às regras e afirmações que o caracteriza. Neste sentido eles admitem uma identidade própria. Por esse ponto de vista, 26071925 é um número natural, ainda podemos afirmar a igualdade: $26071925 = 25 \times 1042877$. Ser múltiplo de 25 é uma propriedade aritmética desse número. Por outro lado, quando o mesmo número é denotado na forma 26.07.1925, ele perde a conotação aritmética e passa a admitir outro significado atribuído à notação que remete a uma data específica do calendário gregoriano, deixando de ser compreendido como um número natural com propriedades aritméticas. Esta é a data de falecimento de Frege, uma sequência numérica de natureza informativa. Portanto, os números também abrangem um importante contexto informativo. É o caso também da sequência numérica do seu CPF à qual é atribuída a ideia de identificação e registro. De fato, o cadastro de pessoa física utiliza de um número com 11 dígitos para identificar cada cidadão brasileiro com uma série de informações. Assim, estes números são vistos como códigos aos quais são atribuídos significados diversos.

Observando os atributos dos números, surge a seguinte questão: basta possuir um atributo numérico (cardinal, ordinal, medida) para ser tido como número? A resposta nos parece ser claramente negativa, uma vez que o alfabeto não é um conjunto numérico apesar de ser ordenado.

A questão é que os números podem admitir alguns atributos como cardinalidade, ordem e medida, mas estes não determinam o que é um número. Um software de planilhas tem suas colunas enumeradas pela sequência: $\{A, B, C, D, \dots, Z, AA, AB, \dots., ZY, ZZ, AAA, \dots\}$. Podemos notar que essa sequência pode ser utilizada com o sentido de enumeração, pois ela é ordenada, e pelos axiomas de Peano podemos relacionar essa sequência com os números naturais.

Os números nem sempre estão diretamente relacionados a um significado explícito, o ensino-aprendizagem da Aritmética desenvolve o cálculo mental. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece que “a escola precisa preparar o estudante para entender como a Matemática é aplicada em diferentes situações. Na aula, o contexto pode ser puramente matemático, ou seja, não é necessário que a questão apresentada seja referente a um fato cotidiano” (NOVA ESCOLA, 2020, nº 32). A Matemática é lida com os números em âmbito geral, pois qualquer outra ciência explica o contexto que os números estão inseridos. A expressão aritmética $\mathbf{4+5}$ não enuncia necessariamente uma quantidade. A solução $\mathbf{9}$, não representa necessariamente a quantidade de objetos. Se essa soma fosse aplicada à física, em um indicativo de velocidade, por exemplo, poderia significar que **4 m/s** mais **5 m/s** resulta em **9 m/s**. As operações aritméticas têm por finalidade exercitar nossa cognição, as aplicações são consequências desses estudos. “A linguagem da matemática pode ter algum tipo de significado, mas, então, este significado é irrelevante para a prática da matemática. No que que diz respeito ao matemático praticante, os símbolos da linguagem matemática podem também não ter sentido”. (SHAPIRO, 2016, p. 209).

Euclides inicia o Livro I, com as seguintes definições: “**Ponto** é aquilo de que nada é parte; E **linha** é comprimento sem largura; **Superfície** é aquilo que tem somente comprimento e largura” (EUCLIDES, 2009, p. 97). Empiricamente, ponto é uma superfície mínima e linha tem largura. De fato, a superfície de um lago não é um plano, já que nela existe ondulações. Construções geométricas derivadas dessas definições são possíveis somente pelo intelecto. Concretamente não existem pontos, linhas e nem superfícies. Assim, a Geometria é abstrata. Na realidade física representamos esses objetos mentalmente como reflexos imperfeitos das formas abstratas. As formas geométricas, como descritas por Euclides, apenas existem como abstração, na realidade física elas são imperfeitas. Contudo, uma operação aritmética executada por meios abstratos é a mesma operação aritmética executada na realidade física. Neste sentido, talvez a ideia de que qualquer construção aritmética abstrata possa se manifestar perfeitamente na realidade física seja verdadeira. Um número que é dividido por 2 e deixa resto 1 é um número ímpar. Rigorosamente, todo número ímpar $\boldsymbol{m}$ é da forma $\boldsymbol{m = 2n + 1}$, para algum inteiro $\boldsymbol{n}$. Representando da forma $\boldsymbol{m = n + 1 + n}$, observando o segundo membro da expressão, veremos que um número ímpar pode ser escrito como a soma do número $\mathbf{n}$ à esquerda e à direita do número $\mathbf{1}$ que é um termo mediano. Assim $\mathbf{9 = 2.4 + 1}$, pode ser representado na forma $\mathbf{9 = 4 + 1 + 4}$. Utilizando quantidades concretas temos o mesmo resultado. As propriedades aritméticas são iguais na realidade abstrata e na realidade física. Esse é um diferencial entre a Geometria e a Aritmética, já que a primeira não discorre sobre objetos da realidade física enquanto a segunda descreve de forma abstrata conceitos físicos.

Uma suposição perfeitamente aceitável é a de que não existe um objeto denominado número. A validade de um sistema numérico dependente da coerência de cada sistema fundamentado por axiomas. Em Abbagnano (2007, p. 720) encontramos que o conceito de número não está ligado a uma determinada interpretação. Mas é determinado por diferentes interpretações. A possibilidade de diferentes interpretações caracteriza a noção de número em qualquer sistema. A compreensão numérica está sujeita ao contexto interpretativo.

Este trabalho evidencia com clareza a dificuldade que a matemática, como ciência, encontrou e ainda encontra para definir um objeto tão fundamental em sua existência, o número. O que a princípio pareceria simples se revelou um grandioso problema que até os dias atuais não encontra solução. O receio e incômodo expressados por Frege como "uma vergonha para a ciência", tem sido objeto de estudos e discussões que perpassam os anos.

Uma conclusão possível e bastante plausível à qual este trabalho nos remete, é a de que nenhuma definição de número jamais encontrou consenso entre os matemáticos, justamente porque este tal objeto não pode vir a ser apreendido, captado ou assimilado, completamente, em sua totalidade, por alguma sequência de palavras, por mais significativas e mais próximas da ideia de número elas possam chegar. Neste sentido, a construção axiomática apresentada por Peano acaba sendo uma possibilidade mais concreta para uma resposta sensata à questão: Afinal, o que é um número? De fato, pois Peano diria que número não é nada que se possa definir, ele é um objeto que precisamos aceitar sem definição. Sendo assim, não nos é permitido saber o que é número. Isto, por outro lado, abre uma infinidade de possibilidades para representarmos um número via modelos de um sistema axiomático. Um modelo é uma representação particular dos termos e relações primitivas por outros objetos e relações que conhecemos, de modo que a representação satisfaça os axiomas estipulados. É o que fazemos, grosso modo, quando atribuímos a um número o preço dos objetos de consumo. Quando dizemos que uma bicicleta custa R$ 300,00 estamos atribuindo ao objeto não definido *número 300*, uma interpretação deste como preço do objeto real bicicleta. Sugerimos a dissertação de Silva (2020) como uma fonte para o tema.

Faz-se necessário reconhecer que, em relação à indagação sobre o que é número, ainda há um longo caminho a ser trilhado na busca por uma resposta que venha a ser mais objetiva e que também venha a alcançar consenso amplo e irrestrito na comunidade matemática. De maneira geral, a construção de ferramentas que visem propiciar ao professor de matemática e a todos aqueles que se interessam pela matemática uma via para a construção de conhecimentos questionadores e sensíveis às várias questões singulares, como a proposta neste artigo, também admite uma estrada longa a ser percorrida. Esperamos ter aberto uma possibilidade para que alguns passos sejam trilhados nesta estrada.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. Dicionário de filosofia. Tradução de Alfredo Bossi. 5ª ed. Editora Martins Fontes, 2007.
ARISTOTELES. Metafísica. Tradução de Edson Bini., Bauru, SP. Edipro, 2006.

BOYER, C. B. História da matemática. Tradução de Helena Castro. São Paulo: Editora Edgar Blucher Ltda, 2012.

BRITTO, A. H. O teorema de Frege: uma reavaliação do seu projeto logicista. Dissertação (Mestrado em Filosofia) - Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

EUCLIDES. Os Elementos. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, H. Introdução à história da matemática. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora Unicamp, 2004.

FREGE, G. Os Fundamentos da Aritmética: Uma investigação lógico-matemática acerca do conceito de número. Tradução: Antônio Zilhão. S.l. Imprensa Nacional-Casa da Moeda, 1992.

GARBI, G. A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. 2. Ed. São Paulo: Editora Livraria Física, 2007.

HALMOS, P. R. Teoria ingênua dos conjuntos. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2001.

MATEMELGA. Números tetraédricos. Disponível em https://matemelga.wordpress.com /2015/11/. Acesso em 11 de fev. 2020.

MORGADO, A.; CARVALHO, P. Matemática Discreta. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

NOVA ESCOLA. Novos temas e reorganização das áreas são as principais novidades em Matemática, c 2020. Disponível em: <https://novaescola.org.br/bncc/conteudo/32/novos-temas-e-reorganizacao-das-areas-sao-as-principais-novidades-em-matemática/>. Acesso em: 09 de out. de 2020.

RIBEIRO, M. R. R.; BERGAMASCHI, P. R.; NASCIMENTO, D. L.; SANTEE, D. M.; JÚNIOR, P. A. S. O ensino da geometria como verdade “absoluta”. Brazilian Journal of Development, Curitiba, v.06, n.12, p. 95651-95666, dez. 2020. Disponível em: https://www.brazilianjournals.com/index.php/BRJD/article/view/21193. Acesso em 20 jan. 2021.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. Tópicos de História da matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

RUSSELL, B. Introdução à Filosofia Matemática. Tradução de Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Zahar, 2007.

SHAPIRO, S. Filosofia da Matemática. Ed. Lisboa, 2016.

SILVA, J. Filosofias da matemática. São Paulo: Editora UNESP, 2007.

SILVA, F. Uma investigação sobre a ideia de Número. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) – Instituto de Matemática e Tecnologia, Universidade Federal de Catalão. Catalão, p. 71. 2020.

SINGH, S. O Último Teorema de Fermat: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. Tradução de Jorge Luiz Calife. 6ª Ed. Rio de Janeiro: Record, 1999.