

Modelos de Curvas de Resistência à Fadiga de Pontes Ferroviárias Metálicas por Métodos Probabilísticos

Models of Fatigue Resistance Curves of Steel Railway Bridges by Probabilistic Methods

DOI:10.34115/basrv5n2-036

Recebimento dos originais: 23/03/2021

Aceitação para publicação: 14/04/2021

Maria Rafaela Bezerra de Macêdo Ribeiro

Mestranda de Engenharia Civil (Estruturas e Materiais)

Universidade Federal do Rio de Janeiro, Programa de Engenharia Civil - COPPE
Centro de Tecnologia, Ilha do Fundão, Cep 21941-972, Rio de Janeiro/Rio de Janeiro,
Brasil

E-mail:maria.ribeiro@coc.ufrj.br

Ritermayer Monteiro Teixeira

Doutorado em Engenharia de Estruturas

Universidade de São Paulo, Programa de Pós - Graduação em Engenharia Civil
Rua Augusto Corrêa, Cep 66075-900, Belém/Pará, Brasil

E-mail:ritermayer@ufpa.br

RESUMO

Em um modelo de limite de fadiga, os elementos estruturais testados abaixo do limite de fadiga (também conhecido como estresse de limiar) teoricamente nunca falharão. O presente trabalho trata-se de um estudo acerca da curva de resistência à fadiga aplicada em detalhes estruturais rebitados treliçados de pontes ferroviárias. Foram apresentados diferentes modelos de curvas S-N-p para comportamento linear e não-linear. Realizou-se um tratamento estatístico por meio de regressão linear pelo método dos mínimos quadrados para diferentes probabilidades de falha, adotando também para este modelo o caso dos *runouts* como pontos de falha. Tal abordagem analítica foi implementada posteriormente no Método da Máxima Verossimilhança desenvolvido em Matlab®, comparando as diferenças entre as abordagens.

Palavras-Chave: Fadiga, Pontes Ferroviárias, Probabilidade, Otimização.

ABSTRACT

In a fatigue limit model, structural elements tested below the fatigue limit (also known as threshold stress) will theoretically never fail. The present work is a study about the fatigue resistance curve applied in structural details riveted truss of railway bridges. Different models of S-N-p curves were presented for linear and nonlinear behavior. A statistical treatment was performed by means of linear regression by the least squares method for different probabilities of failure, also adopting for this model the case of runouts as points of failure. This analytical approach was later implemented in the Maximum Likelihood Method developed in Matlab®, comparing the differences between the approaches.

Keywords: Fatigue, Railway Bridge, Probability, Optimization.

1 INTRODUÇÃO

A busca por melhorias na operação do serviço ferroviário, em especial nas OAE's tem como principal objetivo a otimização de entregas com maior eficiência e velocidade, a redução de atrasos e maior organização do cronograma de transporte. Essas metodologias baseadas em algoritmos de otimização e confiabilidade trazem maior eficiência e maior capacidade do transporte de carga (SGROTT e ZAGHENI, 2020). Muitas dessas estruturas continuam operantes, mesmo já passado mais de um século, desse modo, técnicas mais robustas e globais poderão auxiliar na análise das mesmas.

Os processos de avaliação de fadiga baseiam-se em curvas S-N. Tais curvas são utilizadas para representar uma extensa base de dados que são resultados de testes com os mais diversos tipos de membros e detalhes. A nível de análise global, este método possui a conveniência de utilizar tensões nominais para avaliação da vida à fadiga, facilitando a aplicação em conjunto com uma análise estrutural. Todavia, essas curvas não são capazes de traduzir o comportamento da grande gama de ligações e configurações possíveis, limitando-se a um número restrito de classes de detalhes. Escolher indevidamente um determinado tipo de classe que contemple o problema a ser analisado, acarretará a um elevado nível de incerteza nos resultados.

Há uma extensa experiência acumulada referente à caracterização da resistência à fadiga de detalhes rebitados com base em resultados de testes S-N com membros em escala real. No entanto, ainda há um limitado entendimento das causas físicas dos mecanismos de falhas específicos deste tipo de ligação. Isso ocorre porque não é possível isolar e estudar os parâmetros separadamente nos testes em escala real. Dessa maneira, considera-se que a curva S-N para classes de detalhes já inclui, de forma conservadora, todos os efeitos que podem influenciar no processo de falha tais como, tensões médias, efeitos de sequência, gradientes de tensões, tensões residuais, corrosão, pré-esforço nos rebites, propriedades metalúrgicas, trincas pré-existentes e acabamento superficial (AGHOURY, 2012).

Além disso, sabe-se que há pouca informação existente sobre falhas que ocorrem sob o regime de fadiga de alto ciclo (HCF), geralmente experimentado por conexões rebitadas típicas de pontes. Neste processo, caracterizado por baixos níveis de carregamento externo e tensões próximas ao limiar de fadiga da ligação, o método S-N apresenta as maiores incertezas e a influência dos defeitos superficiais onde o dano se inicia passa a ser relevante (TEIXEIRA, 2015.)

2 METODOLOGIA

2.1 MODELAGEM DE RESISTÊNCIA A FADIGA

A resistência à fadiga de detalhes estruturais é tradicionalmente apresentada na forma de curvas S-N que relacionam faixa de tensão, $\Delta\sigma$, para o quartil de probabilidade de número de ciclos até a falha, N. Essas curvas são obtidas a partir de testes de fadiga a amplitudes de tensão constantes (CAFL).

2.2 MODELOS DE CURVAS S-N

2.2.1 Curva S-N Linear em Escala Log-Log

Neste tipo de modelo o limite de fadiga é fixado. Em geral, usam-se curvas quartis para avaliar a gama de tensão correspondente a um específico número de ciclos. Estas curvas são geralmente obtidas usando limites de confiança de 95% para uma probabilidade de falha de 2.25% (FISHER; KULAK; SMITH, 1998), o que equivale a adotar um limite inferior da resistência à fadiga (aproximadamente dois desvios padrões abaixo da média). Em códigos normativos internacionais tais como AREMA (2013) e EUROCODE (2005) são assumidas probabilidades de falha de 2,25% e 5%, respectivamente. De todo modo, o limite de fadiga é atribuído arbitrariamente, já que o modelo não é capaz de prever valores para γ . Tais curvas apresentam um comportamento em exponencial (equação 1), sendo necessária sua linearização em escala log de modo a facilitar a interpretação dos dados (equação 2 e 3).

$$N = \Delta\sigma^{-m} \cdot k, \quad \Delta\sigma > \gamma \quad (1)$$

$$\ln(N) = -m \cdot \ln(\Delta\sigma) + \ln(k), \quad \ln(\Delta\sigma) > \ln(\gamma) \quad (2)$$

$$x = -m \cdot y + \ln(k), \quad y > v \quad (3)$$

2.2.2 Curva S-N Não-Linear em Escala Log-Log

O limite de fadiga é previsto neste modelo, que passa a apresentar um comportamento não linear em escala log-log. A curva apresenta um comportamento assintótico quando $\Delta\sigma \rightarrow \gamma$. O parâmetro γ , apesar de ser um valor arbitrário fixo que entra no modelo, este controla a curvatura da curva S-N, como é definido na equação 4, e na sua transformação para domínio logarítmico nas equações 5 e 6.

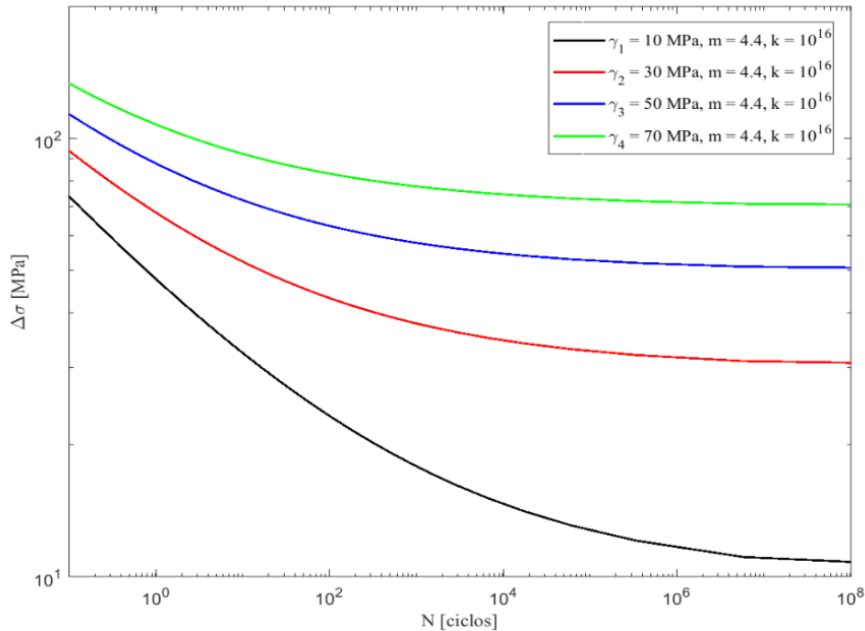
$$N = (\Delta\sigma - \gamma)^{-m} \cdot k, \quad \Delta\sigma > \gamma \quad (4)$$

$$\ln(N) = -m \cdot \ln(\Delta\sigma - \gamma) + \ln(k), \quad \ln(\Delta\sigma) > \ln(\gamma) \quad (5)$$

$$x = -m \cdot \ln[\exp(y) - \exp(v)] + \ln(k), \quad y > v \quad (6)$$

Para aplicações de gamas de tensões de 200 MPa, são mostrados como a curva responde ao comportamento não linear da curva para limites de fadiga de 10, 30, 50 e 70 MPa respectivamente, como é mostrado na figura 1 a seguir.

Figura 1: Curvas Não-Lineares de Fadiga.



2.3 ABORDAGEM PROBABILÍSTICA

Esse tipo de abordagem assume que a vida à fadiga é uma variável aleatória definida para cada gama controlada de tensão. Modelos para definição de curvas lineares e não lineares em escala log-log para probabilidade de falha de 50% (mediana) são definidos nas equações 7 e 8.

$$\bar{x}(y) = E[x | y] = -m \cdot y + \ln(k), \quad y > v \quad (7)$$

$$\bar{x}(y) = E[x | y] = -m \cdot \ln[\exp(y) - \exp(v)] + \ln(k), \quad y > v \quad (8)$$

Sendo $E[x | y]$ o valor esperado da vida à fadiga em domínio logaritmo. O desvio padrão S_x de vida a fadiga é dada pela $\sqrt{Var[x]}$. Diferentes hipóteses paramétricas podem ser usadas para modelagem da vida à fadiga, Pascual e Meeker (1997) apresentaram um modelo com um parâmetro de limite de fadiga e desvio padrão não-constante da vida útil de fadiga log para descrever a curvatura e variância não-constante em relações de gama de tensão e vida. D'Angelo *et al* (2014) realizaram estudos com desvio-padrão constante baseado em mínimos quadrados sendo o modelo aplicado no método de máxima

verossimilhança para detalhes sensíveis à fadiga de pontes de aço para conexões soldadas e aparafusadas.

Tais modelos seguem formas de distribuição. No domínio exponencial a vida a fadiga segue distribuição Lognormal, ou seja, $N \square \text{Logn}(\bar{N}, S_N)$. Para tanto, no domínio logarítmico equivale a assumir que a vida a fadiga segue uma distribuição Normal $x \square \text{Norm}(\bar{x}, S_x)$, onde \bar{N} e S_N representam, respectivamente, a curva mediana e o desvio padrão de N . Do mesmo modo, modelos de Weibull $N \square \text{Weib}(\bar{N}, S_N)$, são equivalentes a modelos de Valores Extremos $x \square \text{EV}(\bar{x}, S_x)$ em escala logarítmica.

Diferentes hipóteses podem ser usadas para a variância do modelo. Little (1990) apresentou um teste de cima para baixo modificado que usa uma estratégia de variância mínima para escolher o próximo nível de tensão. O método *up-and-down* é uma maneira eficiente e eficaz de estimar o limite mediano de fadiga. Ele não é usado para estimar a relação de tensão-vida, porque os dados de fadiga são analisados como dados de resposta quântica, em que a principal preocupação é se uma amostra no teste falhou ou não.

Pascual e Meeker (1999), propuseram um modelo onde o desvio padrão S_x varia exponencialmente com y . Pascual e Meeker (1997) e D'Angelo *et al* (2014) apresentam modelos semelhantes, onde a variabilidade não constante geralmente presente nos dados de fadiga é dado por meio de um limite de fadiga randômico. Neste caso, a vida à distribuição da vida à fadiga é condicionada à distribuição estatística de γ . A variância variável presente nestes modelos realizados são dados em função do desvio padrão que varia ao longo do intervalo de y , sendo que esse parâmetro diminui em altas tensões e aumenta à medida que se aproxima das baixas tensões. Diferente da variância constante, onde o S_x não varia ao longo do intervalo y . Neste trabalho, as análises serão dadas em função da variância constante. Tais abordagens serão descritas em modelos específicos apresentados na seção seguinte.

2.4 MODELOS DE CURVAS S-N-p

Para descrever um modelo probabilístico de resistência à fadiga é necessário determinar suas funções de densidade de probabilidade (pdf) e de probabilidades acumuladas (cdf), as quais dependem da hipótese paramétrica adotada. A cdf define a probabilidade p em função do quanto o ponto se desvia da curva mediana para um dado desvio padrão. De uma forma geral, as curvas S-N-p podem ser determinadas

considerando a Distribuição Cumulativa Inversa de probabilidades, F_x^{-1} , para uma dada probabilidade p , conforme a seguinte nas expressões de 9 à 11:

$$F_x\left(\frac{x - \bar{x}(y)}{S_x}\right) = p \quad (9)$$

$$\frac{x - \bar{x}(y)}{S_x} = F_x^{-1}(p) \quad (10)$$

$$x = \bar{x}(y) + [F_x^{-1}(p)] \cdot S_x \quad (11)$$

Na expressão acima, $\bar{x}(y)$ pode ser tanto linear quanto não linear em domínio logarítmico, para uma distribuição de probabilidades qualquer. A curva S-N-p obtida por meio da equação 9 é um campo probabilístico. Cada curva dessa família representa um quartil da distribuição cumulativa de probabilidades (curvas quartis).

2.5 ESTIMADOR DE PARÂMETROS

A determinação do conjunto de parâmetros do modelo, $\theta = [m, k, S_x, \dots]$, pode ser feita por diferentes métodos de estimação, a exemplo dos métodos dos mínimos quadrados e da função de Máxima Verossimilhança.

A norma ASTM (2015) possui práticas estatísticas para linearização de curvas de fadiga baseada em mínimos quadrados, uma otimização matemática que procura encontrar o melhor ajuste para um conjunto de dados tentando minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre o valor estimado e os dados observados. Pascual e Meeker (1999) utilizaram a Máxima Verossimilhança para estimar parâmetros de vida a fadiga aleatórios que se ajustam a uma curva S-N não linear com um limite de fadiga também aleatório.

2.5.1 Método dos Mínimos Quadrados

Neste modelo, a vida à fadiga N é assumida como lognormalmente distribuída e o desvio padrão de x é constante. A curva S-N é linear em escala log-log (\bar{x} determinada de acordo com a equação 7). O limite de fadiga γ é determinístico e arbitrariamente assumido em um dado número de ciclos, a exemplo do Eurocódigo onde o CAFL é dado para 1 milhão de ciclos, por exemplo. O conjunto de parâmetros do modelo é dado por $\theta = [m, k, S_x]$, sendo determinado por meio do método de mínimos quadrados. A pdf e a cdf de x podem ser determinadas de acordo com as equações 12 e 13, respectivamente.

$$f_x(x; y, \theta) = \frac{1}{S_x} \cdot \phi \left[\frac{x - \bar{x}(y; m, k)}{S_x} \right], \quad N > 0 \quad (12)$$

$$F_x(x; y, \theta) = p = \Phi \left[\frac{x - \bar{x}(y; m, k)}{S_x} \right] \quad (13)$$

Onde Φ é um valor estatístico que parte de uma hipótese nula que segue uma distribuição normal de média zero e desvio padrão 1.

Pela ASTM (2015), o tratamento dos dados por esse método é dado por meio de vetores $\hat{\mathbf{Y}} = [\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n]^T$ que são os pontos amostrais dos logaritmos das gamas de tensões e $\hat{\mathbf{X}} = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n]^T$ que serão os pontos amostrais dos logaritmos das vidas à fadiga.

O coeficiente angular m da reta é calculada pela seguinte relação dada na equação 14, onde μ_y e μ_x são as médias amostras de $\hat{\mathbf{Y}}$ e $\hat{\mathbf{X}}$, respectivamente. O limite de parada de vida de fadiga k , é dado como um ponto para uma média de número de ciclos somado a um valor de tensão para um dado coeficiente angular, mostrado na equação 15.

$$m = - \left[\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \mu_y) \cdot (\hat{x}_i - \mu_x)}{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \mu_y)^2} \right] = - \left[\frac{(\hat{\mathbf{Y}} - \mu_y)^T \cdot (\hat{\mathbf{X}} - \mu_x)}{(\hat{\mathbf{Y}} - \mu_y)^T \cdot (\hat{\mathbf{Y}} - \mu_y)} \right] \quad (14)$$

$$k = \exp(\mu_x + m \cdot \mu_y) \quad (15)$$

Dessa forma, um valor \bar{x}_i de vida de fadiga pode ser reescrito em forma matricial de um vetor $\bar{\mathbf{X}}$, como é definido nas equações 16 e 17. Como também o S_x pode ser reescrito em forma matricial, mostrado na equação 18.

$$\bar{x}_i = \ln(k) - m \cdot \hat{y}_i \quad (16)$$

$$\bar{\mathbf{X}} = \ln(k) - m \cdot \hat{\mathbf{Y}} \quad (17)$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{x}_i - \bar{x}_i)^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{(\hat{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{X}})^T \cdot (\hat{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{X}})}{n-2}} \quad (18)$$

Nas figuras 2 e 3 são apresentados os resultados da regressão linear, tendo como banco de dados utilizado, a compilação de ensaios de fadiga feito por Taras e Greiner

(2010) para detalhes rebitados com bandas de probabilidade para 2,25%, 50% e 97,5% de falha considerando no primeiro caso os pontos ensaiados que chegaram a falha, e no segundo caso foram acrescentados os pontos de *runouts*, como sendo pontos de falha, mas que na verdade foram ensaios nos quais os corpos de prova não chegaram a romper, e a execução do ensaio foi interrompida.

Figura 2: Curva S-N-p de falhas.

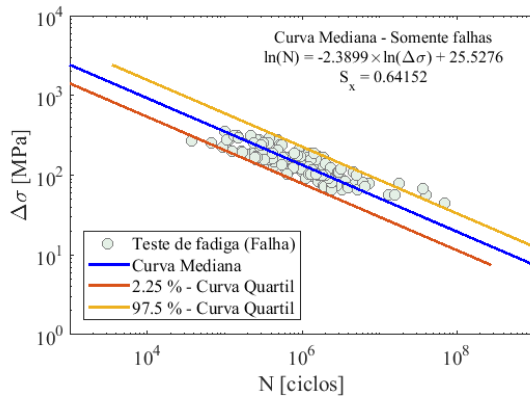
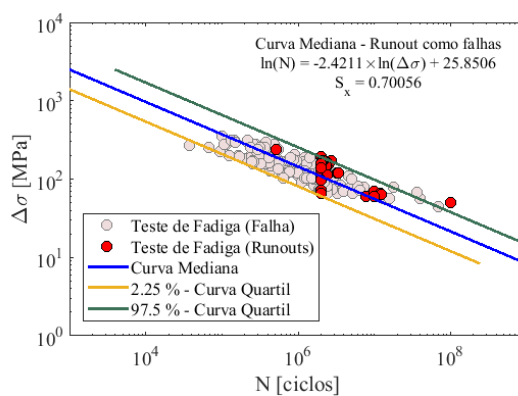


Figura 3: Curva S-N-p de *runouts* como falhas.



Percebe-se que a inclusão dos *runouts* neste modelo aumentou a inclinação da reta mediana de quando apenas se tinha as falhas em aproximadamente 1,30% e o desvio padrão em 9,20%. O parâmetro k de limite de fadiga possuiu também um aumento de um 1,26%. Na prática esse aumento do k resultou de $1,22 \cdot 10^{11}$ para $1,69 \cdot 10^{11}$ ciclos. Nota-se a grande sensibilidade dos parâmetros para pequenas variações em escala real.

2.5.2 Método de Máxima Verossimilhança

No campo de investigação da fadiga, Pascual e Meeker (1999) propuseram um modelo probabilístico de 5 parâmetros usando o MLE (Maximum Likelihood Estimation). O método determina a curva S-N que descreve a mais provável (mais verossímil) localização de cada resultado de teste, incluindo *runout*. (Sarkani *et al*, 2007) apresentou uma metodologia generalizada baseada no MLE para inclusão de *runouts*, onde é possível considerar diferentes distribuições de probabilidade para a vida à fadiga. Um modelo baseado na distribuição de Weibull foi demonstrado e aplicado a um conjunto de dados reais para estimar as curvas medianas e intervalos de confiança.

O método MLE consiste em maximizar a verossimilhança de um conjunto de parâmetros calculados para ajustar o modelo. Para um dado conjunto de x_i observações independentes obtidas em diferentes níveis y_i , a função de verossimilhança é dado pela equação 19:

$$\Gamma(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^n [f_x(x_i; y_i, \boldsymbol{\theta})]^{\delta_i} \cdot [1 - F_x(x_i; y_i, \boldsymbol{\theta})]^{1-\delta_i} \quad (19)$$

Onde $\delta_i = 1$ para falha e $\delta_i = 0$ para *runout*; $f_x(x_i; y_i, \boldsymbol{\theta})$ e $F_x(x_i; y_i, \boldsymbol{\theta})$ são, respectivamente, a função de densidade de probabilidade e a distribuição cumulativa de probabilidade de x_i ; $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor de parâmetros do modelo.

Em geral, é mais fácil trabalhar com a função de verossimilhança em domínio logarítmico, porque nesta forma a maximização é feita por uma soma ao invés de um produto. Dessa forma, a função de log-verossimilhança $L_i(z_i; \boldsymbol{\theta})$ para um único ponto de teste da amostra é dada pela equação 20:

$$L_i(z_i; \boldsymbol{\theta}) = \delta_i \cdot \{\ln [f_x(x_i; y_i, \boldsymbol{\theta})]\} + (1 - \delta_i) \cdot \ln [1 - F_x(x_i; y_i, \boldsymbol{\theta})] \quad (20)$$

Assim, a função de log-verossimilhança para o conjunto inteiro de dados, $\Lambda(\boldsymbol{\theta}) = \ln[\Gamma(\boldsymbol{\theta})]$, é dada pela contribuição de cada ponto da amostra, de acordo com a equação 21.

$$\Lambda(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^n L_i(z_i; \boldsymbol{\theta}) \quad (21)$$

O conjunto de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ deve ser determinado para maximizar a função $\Lambda(\boldsymbol{\theta})$, o que pode ser solucionado pela utilização de algum algoritmo de otimização. Neste trabalho, foi desenvolvida uma subrotina usando a função nativa *fmincon* disponível no MATLAB Optimization Toolbox™ (The Mathworks, 2010). Esta função pode ser aplicada para solução de problemas de minimização não lineares com restrição, e inclui alguns algoritmos de otimização, tais como os métodos Active-set (conjunto ativo) e Interior-point (ponto interior). Tais algoritmos devem ser usados para minimizar $-\Lambda(\boldsymbol{\theta})$ (equivalente a maximizar $\Lambda(\boldsymbol{\theta})$) quando restrições iniciais são dadas para $\boldsymbol{\theta}$, a fim de limitar o espaço de busca dentro de uma região factível. As restrições (constraints) dos parâmetros podem ser introduzidas diretamente no algoritmo por meio de uma inequação linear, conforme a equação 22 de otimização expressa a seguir:

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} \{-\Lambda(\boldsymbol{\theta}) \text{ tal que } \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta} \leq \mathbf{b}\} \quad (22)$$

Onde \mathbf{A} é uma matriz e \mathbf{b} é um vetor criados para estabelecer as restrições, com base no domínio factível de cada parâmetro. A generalização da matriz de restrições é mostrada na equação 23:

$$\begin{cases} \theta_1^{\text{inf}} \leq \theta_1 \leq \theta_1^{\text{sup}} \\ \theta_2^{\text{inf}} \leq \theta_2 \leq \theta_2^{\text{sup}} \\ \vdots \\ \theta_k^{\text{inf}} \leq \theta_k \leq \theta_k^{\text{sup}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_1 \geq \theta_1^{\text{inf}} \\ \theta_1 \leq \theta_1^{\text{sup}} \\ \theta_2 \geq \theta_2^{\text{inf}} \\ \theta_2 \leq \theta_2^{\text{sup}} \\ \vdots \\ \theta_k \geq \theta_k^{\text{inf}} \\ \theta_k \leq \theta_k^{\text{sup}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\theta_1 \leq -\theta_1^{\text{inf}} \\ \theta_1 \leq \theta_1^{\text{sup}} \\ -\theta_2 \leq -\theta_2^{\text{inf}} \\ \theta_2 \leq \theta_2^{\text{sup}} \\ \vdots \\ -\theta_k \leq -\theta_k^{\text{inf}} \\ \theta_k \leq \theta_k^{\text{sup}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \cdot \theta_1 + 0 \cdot \theta_2 + 0 \cdot \theta_3 + \dots + 0 \cdot \theta_k \leq -\theta_1^{\text{inf}} \\ 1 \cdot \theta_1 + 0 \cdot \theta_2 + 0 \cdot \theta_3 + \dots + 0 \cdot \theta_k \leq \theta_1^{\text{sup}} \\ 0 \cdot \theta_1 - 1 \cdot \theta_2 + 0 \cdot \theta_3 + \dots + 0 \cdot \theta_k \leq -\theta_2^{\text{inf}} \\ 0 \cdot \theta_1 + 1 \cdot \theta_2 + 0 \cdot \theta_3 + \dots + 0 \cdot \theta_k \leq \theta_2^{\text{sup}} \\ \vdots \\ 0 \cdot \theta_1 + 0 \cdot \theta_2 + 0 \cdot \theta_3 + \dots + 1 \cdot \theta_k \leq -\theta_k^{\text{inf}} \\ 0 \cdot \theta_1 + 0 \cdot \theta_2 + 0 \cdot \theta_3 + \dots + 1 \cdot \theta_k \leq \theta_k^{\text{sup}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \vdots \\ \theta_k \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -\theta_1^{\text{inf}} \\ \theta_1^{\text{sup}} \\ -\theta_2^{\text{inf}} \\ \theta_2^{\text{sup}} \\ \vdots \\ -\theta_k^{\text{inf}} \\ \theta_k^{\text{sup}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \vdots \\ \theta_k \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\theta_1^{\text{inf}} \\ \theta_1^{\text{sup}} \\ -\theta_2^{\text{inf}} \\ \theta_2^{\text{sup}} \\ \vdots \\ -\theta_k^{\text{inf}} \\ \theta_k^{\text{sup}} \end{bmatrix} \quad (23)$$

2.5.2.1 Aplicação do Método MLE

As mesmas hipóteses do modelo de mínimos quadrados são adotadas, mas o conjunto de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ é determinado por meio do Método de Máxima Verossimilhança. Com a aplicação deste método no modelo, novos parâmetros foram obtidos para m , k e S_x . Nas figuras 4 e 5 são apresentadas a superfície e as curvas de nível, respectivamente, formadas pela função de log-verossimilhança, considerando o coeficiente angular como um eixo fixo. Isso se faz necessário em virtude de não ser possível a visualização de uma quarta dimensão.

Figura 4: Função Log-Verossimilhança para m fixo.

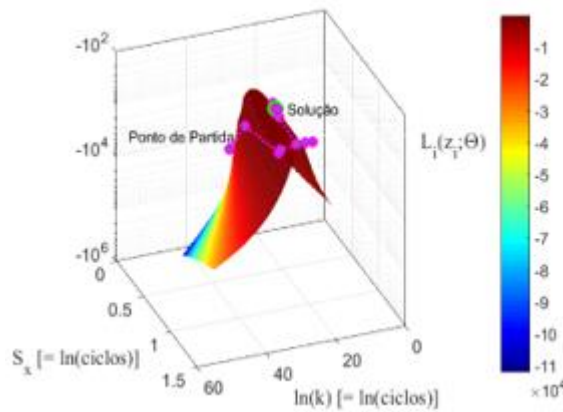
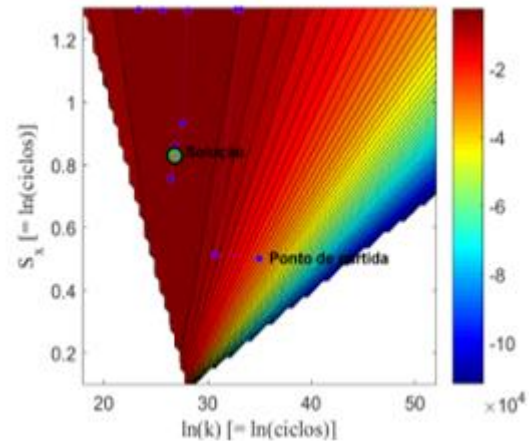


Figura 5: Curvas de Nível para m fixo.



Do mesmo modo, o desvio padrão também é fixado para seja possível a visualização da superfície e curvas de nível, como é apresentado nas figuras 6 e 7. Nota-se em ambas as situações mostradas a formação de um pico, onde é encontrado como solução o ponto de máximo para os parâmetros.

Tabela 1: Comparação dos parâmetros obtidos.

Modelo	k	m	S_x	$\Delta\sigma$ [MPa] $p = 50\%$	$\text{Exp}(k)$
LSE - 1	25,53	-2,39	0,64	100,55	$1,22 \cdot 10^{11}$
LSE - 2	25,85	-2,42	0,70	108,27	$1,69 \cdot 10^{11}$
MLE	26,86	-2,60	0,83	115,43	$4,64 \cdot 10^{11}$

Percebe-se que os valores obtidos para os parâmetros pelo MLE são superiores aos do LSE – 1 e LSE – 2. Isso se deve em função da detecção dos *runouts* pelo método. Por conta da dificuldade de se executar ensaios na região para baixas gamas de tensão, torna-se difícil a previsão de vida à fadiga. Nota-se um conservadorismo do LSE em função da resistência, diferente do MLE que além de obter maior ganho de resistência, obteve o maior limite de fadiga.

Nas tabelas 2 e 3 é apresentado um resumo das propriedades estudadas e abordagens probabilísticas assumidas para modelagem das curvas S-N-p.

Tabela 2: Sumário de Propriedades adotadas para modelos de curvas S-N-p.

Modelo	Definição de parâmetros (θ)	Variância	Limite de Fadiga γ	Modelos S-N-p log-log	Runout	Método de Estimação de Parâmetros
LSE	(m, k, S_x)	Constante	Arbitrário	Linear	Não	Mínimos Quadrados
MLE	(m, k, S_x)	Constante	Arbitrário	Linear	Sim	Máxima Verossimilhança

Tabela 3: Sumário das abordagens probabilísticas adotadas nos modelos S-N-p.

Modelo	Hipóteses Paramétricas				Curva mediana (\bar{x})	Distribuição da vida de fadiga	
	N	$x = \ln(N)$	γ	$v = \ln(\gamma)$		$f_x(x, y, \theta)$	$F_x(x, y, \theta)$
LSE	$\sim \text{Logn}(\bar{N}, S_N)$	$\sim \text{Norm}(\bar{x}, S_x)$	Determinístico	Determinístico	Eq.(7)	Eq.(12)	Eq.(13)
MLE	$\sim \text{Logn}(\bar{N}, S_N)$	$\sim \text{Norm}(\bar{x}, S_x)$	Determinístico	Determinístico	Eq.(7)	Eq.(12)	Eq.(13)

3 CONCLUSÃO

A abordagem de MLE proposta constitui-se de uma ferramenta poderosa que pode ser usada para redefinir as curvas características S-N para detalhes de ligações rebitadas de pontes ferroviárias. A estimativa das curvas S-N características na região de alto ciclo está diretamente relacionada aos dados experimentais e a coerência das estimativas pode ser melhorada pelo aumento da significância das informações destes conjuntos de dados. Tal abordagem pode auxiliar na adoção de novas metodologias para determinação de resistência de vida de fadiga, já que os métodos mais recorrentes de regressão linear possuem limitações. Por meio deste estudo pode-se perceber o conservadorismo do método LSE, em contrapartida o MLE foi capaz de detectar um ganho de resistência, bem como um aumento de k . Além disso, pode-se perceber que este método possui aplicabilidade genérica para estimar curvas de fadiga S-N-p para os demais detalhes sensíveis à fadiga de pontes de aço como conexões soldadas e aparafusadas, bem como para análise do comportamento de outros fenômenos de fadiga.

REFERÊNCIAS

AGHOURY, I. EL. “Numerical tool for fatigue life prediction of corroded steel riveted connections using various damage models”. Ph.D. thesis. Department of Building, Civil and Environmental Engineering, Concordia University, Montréal, Québec, Canada, 2012.
AREMA – American Railway Engineering and Maintenance-of-Way Association (2013). “Manual for Railway Engineering”. Lanham, v. 2.

ASTM (2015) E 739-10: “Standard practice for statistical analysis of linear or linearized stress-life (S–N) and strain-life (ϵ -N) fatigue data”. ASTM International, West Conshohocken, PA, USA.

D’ANGELO .L; ROCHA .M and NUSSBAUMER .A (2014). “S–N–P fatigue curves using maximum likelihood method for fatigue resistance curves with application to straight and welded rebars”. Proceedings of the 7th European Conference on Steel and Composite Structures, Naples, Italy (Landolfo R and Mazzolani FM (eds)). European Convention for Constructional Steelwork, Bruxelas, Bélgica

EN1993-1-9. Eurocode 3: “Design of Steel Structures — Part 1–9: Fatigue”. CEN, Bruxelas, Bélgica, 2005.

FISHER, J. W.; KULAK, G. L.; SMITH, I. “A fatigue primer for structural engineers. National Steel Bridge Alliance”. 1998.

LITTLE, R. E (1990). “Optimal Stress Amplitude Selection in Estimating Median Fatigue Limits Using Small Samples”, *Journal of Testing and Evaluation*, 18, 115-122.

Mathworks (2010) “Optimization Toolbox User’s Guide (Release 2010b)”. Mathworks Inc., Natick, MA, USA.

PASCUAL, F. G.; MEEKER, W. Q. (1999). “Estimating Fatigue Curves with the Random Fatigue-Limit Model”. *Technometrics*.

PASCUAL, F. G.; MEEKER, W. Q. (1997), “Analysis of Fatigue Data with Runouts Based on a Model with Nonconstant Standard Deviation and a Fatigue Limit Parameter”. *Journal of Testing and Evaluation*, 25, 292– 301.

TARAS, A.; GREINER, R (2010). “Development and Application of a Fatigue Class Catalogue for Riveted Bridge Components”. Institute for Steel Structures and Shell Structures, Graz University of Technology, Graz, Austria. (Report ECCS TC6 – 2010) Riveted Components, 1–27.

SARKANI, S., MAZZUCHI, T. A., LEWANDOWSKI, D., & KIHIL, D. P. (2007).

"Runout analysis in fatigue investigation". *Engineering Fracture Mechanics*, 74(18), 2971–2980. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2006.08.026>

SGROTT, P. R. ; ZAGHENI, E. S. S. (2020). "Uma Análise do Cenário do Transporte Ferroviário de Cargas". *Brazilian Applied Science Review*. Curitiba, v. 4, n. 6, p. 3931-3948.

TEIXEIRA, R. M. (2015). "Metodologias para modelagem e análise da fadiga em ligações rebitadas com aplicação em pontes metálicas ferroviárias". Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotecnia, Universidade de São Paulo, São Paulo 2015.